Úvod do geometrie křivek a ploch

Ladislav Hlavatý

2. září 2024

Účelem této přednášky je ilustrace některých základních pojmů diferenciální geometrie na jednoduchých a intuitivně známých varietách jako jsou křivky a plochy v třírozměrném prostoru.

První kapitola těchto skript se týká nejjednodušších křivek a ploch to jest přímek a rovin a nepřednáší se. Je zde uvedena proto, že pojmy v ní zavedené jako např. smíšený součin vektorů, normálový či tečný vektor roviny nebo Eukleidova transformace se v dalším textu považují za známé.

Uvítám každé upozornění na chyby v tomto textu.

Obsah

1 Vektory, body, přímky, roviny. Kartézské souřadnice. (Opakování)

Ukazuje se, že pro širokou třídu fyzikálních jevů je možno "prostory", ve kterých tyto jevy probíhají, popsat matematickými strukturami, které se nazývají vektorové nebo afinní prostory.

1.1 Vektory, souřadnice, skalární součin

Vektorový (lineární) prostor$\vec{E}$ - viz Lineární algebra 1.ročník. Budeme používat téměř výhradně *reálné* vektorové prostory konečné dimenze.
Vektor – prvek (lineárního) vektorového prostoru $\vec{E}$. **Souřadnice** vektoru jsou dány následující větou.

Věta 1.1.1. *Nechť* dim $\vec{E} = n$ *a* $e \equiv (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *je base v* $\vec{E}$. *Pak*

$$\forall \vec{v} \in \vec{E}\ \exists_1 (\ v^1, ..., v^n) \in \mathbf{R}^n \quad \vec{v} = v^1\vec{e}_1 + ... + v^n\vec{e}_n.$$

Dk.: 1.ročník LA.

Důsledek: Pro $i = 1, ..., n$ existují lineární zobrazení $\phi_e^i : \vec{E} \to \mathbf{R}$, $\phi_e^i(\vec{v}) := v^i$ – souřadnicové funkcionály na $\vec{E}$ vzhledem k basi e. Tato zobrazení jsou prvky $\vec{E}^*$ a jsou lineárně nezávislá.

Skalární součin na reálném vektorovém prostoru $\vec{E}$ je zobrazení

$$s : \vec{E} \times \vec{E} \to \mathbf{R},$$

které je bilineární, symetrické a positivně definitní, t.zn. pro všechna $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$, $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \vec{E}$ platí

- $s(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2, \vec{v}) = a_1 s(\vec{u}_1, \vec{v}) + a_2 s(\vec{u}_2, \vec{v})$
- $s(\vec{u}, b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2) = b_1 s(\vec{u}, \vec{v}_1) + b_2 s(\vec{u}, \vec{v}_2)$
- $s(\vec{u}, \vec{v}) = s(\vec{v}, \vec{u})$
- $s(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0\ \wedge\ \Big(s(\vec{u}, \vec{u}) = 0\ \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}\Big)$.

Obvyklé značení: $s(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \vec{u} \cdot \vec{v} \equiv \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Jednotkový vektor $\vec{n}$: $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$.

Kolmé vektory $\vec{u}, \vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Norma vektoru $\vec{u}$: $|\vec{u}| := \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$: Θ, $0 \leq \Theta \leq \pi$, $\cos\Theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Skalární součin není určen jednoznačně. Např. $s(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = s_j \delta_{ij}$ je skalární součin pro libovolná $s_j > 0$. Avšak:

Věta 1.1.2. *Nechť s je skalární součin na konečně rozměrném vektorovém prostoru dimenze n. Pak existuje base* $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *tak, že* $s(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$. *Tato base se nazývá* **ortonormální**.

Důsledek: V ortonormální basi

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i,$$

kde u^i, v^i jsou souřadnice vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ t.j. $u^i = \phi_e^i(\vec{u}),\ v^i = \phi_e^i(\vec{v})$.

Orientace n-rozměrného vektorového prostoru: multilineární, totálně antisymetrické zobrazení

$$\epsilon : \vec{E} \times ... \times \vec{E} \to \mathbf{R}$$

takové, že existuje ortonormální base, ve které $\epsilon(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n) = 1$.
Smíšený součin vektorů: $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) := \epsilon(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$.

Cvičení 1.1.1. *Napište* $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ *v ortonormálních složkách vektorů* $\vec{v}_j$

Cvičení 1.1.2. *Ukažte, že* $\mid (\vec{a}, \vec{b}) \mid$ *je obsah rovnoběžníka a* $\mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \mid$ *je objem rovnoběžnostěnu s hranami* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Tvrzení 1.1.1. *Nechť na n- rozměrném vektorovém prostoru je zadán skalární součin a orientace. Pak pro každou uspořádanou* $(n-1)$*-tici vektorů* $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1})$ *existuje právě jeden vektor* $\vec{V}$ *takový, že*

$$\forall \vec{u} \in \vec{E}\ \epsilon(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1}, \vec{u}) = \vec{V} \cdot \vec{u}.$$

Vektor $\vec{V}$ se nazývá **vektorovým součinem** vektorů $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1})$. Někdy se používá značení $V = [\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{n-1}]$. V třírozměrném vektorovém prostoru $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = \vec{a}.[\vec{b}, \vec{c}]$.

Cvičení 1.1.3. *Spočítejte souřadnice vektorových součinů* $[\vec{a}]$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ *a* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Definice 1.1.1. *Base* $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$ *v prostoru s orientací* ϵ *se nazývá* **pravotočivá (levotočivá)**, *pokud* $\epsilon(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n) > 0,\ (< 0)$.

Příklad: Nechť $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ je levotočivá. Pak $(\vec{e}_1, -\vec{e}_2)$ je pravotočivá.
Zrcadlení: $P\vec{e}_j = -\vec{e}_j$ mění (nemění) točivost base pokud *dim E* je lichá (sudá).

1.2 Afinní prostory, kartézské souřadnice

Elementární geometrické pojmy jako "rovina" či "3-rozměrný prostor" je často užitečné formalizovat pomocí afinních prostorů.

Definice 1.2.1. *Afinním prostorem nazýváme uspořádanou trojici* $\mathcal{E} := (E, d, \vec{E})$, *kde*

- *E je množina*
- *$\vec{E}$ je vektorový prostor.*
- *$d : E \times E \to \vec{E}$, takové že*
    1. *$d(a,b) + d(b,c) + d(c,a) = \vec{0}$.*
    2. *$\forall a \in E \; d_a : E \to \vec{E}, \; d_a(b) := d(a,b)$ je bijekce.*

Rozměrem afinního prostoru $\mathcal{E}$ nazýváme rozměr přidruženého vektorového prostoru $\vec{E}$

Často se značí $d(a,b) \equiv a - b$ a $d_a^{-1}(\vec{v}) \equiv a + \vec{v}$.

Bod – prvek afinního prostoru (přesněji množiny E).

Souřadnice bodu vzhledem k počátku o a basi e:

$$\psi_{o,e} : E \to \mathbf{R}^n, \; \psi_{o,e}(b) \equiv (b^1, b^2, ..., b^n) := (\phi_e^1(b-o), ..., \phi_e^n(b-o)),$$

kde ϕ_e^j jsou souřadnicové funkcionály na $\vec{E}$. Z linearity ϕ a vlastností d plyne

$$\psi_{o,e}^j(b_1) - \psi_{o,e}^j(b_2) = \phi_e^j(b_1 - b_2).$$

Je-li base e ortonormální, pak se souřadnice nazývají **kartézské**.

Transformace souřadnic: Nechť $\psi_{o,e}, \; \tilde{\psi}_{o,e}$ jsou dva sytémy souřadnic vzhledem k počátku a basi $(o, (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n))$ respektive $(\tilde{o}, (\vec{\tilde{e}}_1, ..., \vec{\tilde{e}}_n))$. Pak pro ně platí vztah

$$\psi_{o,e}^j(b) = \tilde{\psi}_{o,e}^i(b + \vec{\omega}) S_i^j, \tag{1}$$

kde $\vec{\omega} = \tilde{o} - o, \; \vec{\tilde{e}}_i = S_i^j \vec{e}_j$ a matice S_i^j je invertibilní.

Dk.:$o + \phi_e^j(b-o)\vec{e}_j = b = \tilde{o} + \tilde{\phi}_e^j(b-o)\vec{\tilde{e}}_j \Rightarrow ...$

Přímka se směrovým vektorem $\vec{u} \in \vec{E}, \vec{u} \neq 0$ procházející bodem $a \in E$:

$$\{b \in E \mid \; b = a + k\vec{u}, \; k \in \mathbf{R}\} \tag{2}$$

Cvičení 1.2.1. *Z definice (2) odvoďte rovnice pro kartézské souřadnice bodů přímky procházející bodem a a mající směrový vektor $\vec{u}$.*

Rovina procházející bodem $a \in E$ určená dvěma lineárně nezávislými vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \vec{E}$:

$$\{b \in E \mid \; b = a + k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2,\; k_1, k_2 \in \mathbf{R}\} \tag{3}$$

Cvičení 1.2.2. *Z definice (3) odvoďte rovnici pro kartézské souřadnice bodů roviny procházející bodem a a mající směrové vektor $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.*

Definice 1.2.2. $(E_1, d_1, \vec{E}_1)$ *je afinním podprostorem* $(E, d, \vec{E})$ *pokud*

$$E_1 \subset E,\; d_1 = d|_{E_1 \times E_1},$$

a $\vec{E}_1$ je lineární podprostor $\vec{E}$.

Cvičení 1.2.3. *Napište vzorec pro vzdálenost bodu $c \in E$ od přímky* (2).

Cvičení 1.2.4. *Napište vzorec pro vzdálenost bodu $c \in E$ od roviny* (3).

Cvičení 1.2.5. *Ukažte že přímka a rovina jsou afinními podprostory (dimenze 1,2) afinního prostoru.*

Vektorové podprostory $Span(\{\vec{u}\}), Span(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$ se někdy nazývají **směrem** (či zaměřením) přímky respektive roviny. Odtud okamžitě plyne definice rovnoběžných přímek a rovin.
Rovnoběžné přímky: $Span(\{\vec{v}\}) = Span(\{\vec{u}\})$.
Rovnoběžné roviny: $Span(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}) = Span(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$.

Cvičení 1.2.6. *Napište "rovnici roviny"v 3-rozměrném prostoru rovnoběžné s "rovinou"*

$$ax + by + cz + d = 0$$

Podobně lze definovat i nadroviny ve vícerozměrných prostorech, jejich směr a rovnoběžnost.

Cvičení 1.2.7. *Napište definici nadroviny dimenze m (v afinním prostoru dimenze $n > m$).*

Nadrovina procházející bodem a a kolmá na $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$:

$$\{b \in E \mid (b - a).\vec{v}_j = 0,\; j = 1, ..., k\} \tag{4}$$

Tvrzení 1.2.1. *Rozměr nadroviny kolmé na* $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}$ *je* $n - m$*, kde* $m = dim\ Span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$

Důsledek 1: Pokud $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ jsou lineárně nezávislé, pak rozměr nadroviny je $n - k$.
Důsledek 2: Podmnožina 3-rozměrného afinního prostoru:

$$\{b \in E \mid (b - a).\vec{n} = 0\}$$

je rovina. Vektor $\vec{n}$ se nazývá **normálový vektor roviny**.

Cvičení 1.2.8. *Definujte přímku v 3-rozměrném afinním prostoru pomocí skalárního součinu.*

Cvičení 1.2.9. *Nechť kartézské souřadnice bodů roviny splňují rovnici*

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{5}$$

Najděte její normálový vektor.

Úhel dvou rovin: úhel jejich normálových vektorů.

Cvičení 1.2.10. *Napište rovnici roviny, která svírá s rovinou (5) úhel 90 a 60 stupňů.*

Konečněrozměrný reálný vektorový prostor vybavený skalárním součinem se nazývá **Eukleidův**. Podobně můžeme definovat i afinní Eukleidův prostor jako afinní prostor, jehož přidružený vektorový prostor je Eukleidův.

Vzdálenost bodů v afinním Eukleidově prostoru:

$$\rho(a, b) := s(a - b, a - b)$$

Eukleidova grupa: Množina afinních zobrazení $F : E \to E$ zachovávajících vzdálenosti bodů.

Tvrzení 1.2.2. *V kartézských souřadnicích mají transformace Eukleidovy grupy tvar*

$$\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ \Phi : x^i \mapsto x^j S_i^j + a^i,\ S_i^j, a^i \in R,\ \sum_{k=1}^{n} S_j^k S_i^k = \delta_{ji} \tag{6}$$

Cvičení 1.2.11. *Nechť* F_1, F_2 *jsou dvě transformace Eukleidovy grupy. Napište, jak se transformují souřadnice při jejich složení* $F_1 \circ F_2$.

Tvrzení 1.2.3. *Nechť* f *je diffeomorfismus* $\mathbf{R}^n$ *zachovávající vzdálenosti. Pak* f *je prvkem Eukleidovy grupy.*

Existuje i alternativní definice Eukleidova prostoru bez použití jeho vektorové či afinní struktury opírající se o transformace souřadnic (6):

Definice 1.2.3. *Nechť* M *je množina mohutnosti kontinua a* $\mathcal{K}$ *je množina, jejíž prvky jsou prostá zobrazení* M *na* $\mathbf{R}^n$ *a která splňuje následující podmínky:*

1. *Pro každé* $k, k' \in \mathcal{K}$ *existuje ortogonální matice* $A \in \mathbf{R}^{(n,n)}$ *a reálná čísla* $c^1, \ldots, c^n$ *tak, že pro každé* $m \in M$ *platí*
$$k'^i(m) = A^i_j k^j(m) + c^i.$$

2. *Množina* $\mathcal{K}$ *je maximální množinou splňující podmínku 1.*

Pak dvojici $(M, \mathcal{K})$ *nazveme reálným* **Eukleidovým prostorem dimenze** n.

Je přirozené nazvat prvky $m \in M$ **body Eukleidova prostoru** a prvky $k \in \mathcal{K}$ **kartézskými souřadnicemi** na tomto prostoru.

Cvičení 1.2.12. *Ukažte, že* $\mathcal{K}$ *jsou třídy ekvivalence všech bijekcí* $M \to \mathbf{R}^n$.

Příkladem Eukleidova prostoru je $(\mathbf{R}^n, [id])$. Je zřejmé, že pro dané M existuje nekonečně mnoho Eukleidových prostorů, neboť libovolná bijekce $M \to \mathbf{R}^n$ definuje Eukleidův prostor.

Na takto definovaném Eukleidově prostoru je možno vždy zavést afinní strukturu způsobem $(M, \mathbf{R}^n, d)$, kde $d(a,b) = (k^1(a) - k^1(b), \ldots, k^n(a) - k^n(b))$. **Vzdálenost bodů** v Eukleidově prostoru $(M, \mathcal{K})$ je definována obvyklým způsobem

$$\rho(a,b) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (k^i(a) - k^i(b))^2} \tag{7}$$

Cvičení 1.2.13. *Ukažte, že definice vzdálenosti bodů (7) je nezávislá na výběru* $k \in \mathcal{K}$.

Neboť se málokdy současně uvažují Eukleidovy prostory se stejným M a různým $\mathcal{K}$, označují se často Eukleidovy prostory dimenze n jedním symbolem E_n.

Pro potřeby diferenciální geometrie je důležitý pojem tečného vektoru v Eukleidově prostoru.

Definice 1.2.4. *Nechť $\mathcal{F}(E_n)$ označuje množinu všech nekonečně derivovatelných funkcí na E_n.* **Tečným vektorem Eukleidova prostoru v bodě** *a nazveme zobrazení*

$$Y_a : \mathcal{F}(E_n) \to \mathbf{R}, Y_a(f) := y^1 \partial_1 f(a) + \ldots + y^n \partial_n f(a), \tag{8}$$

kde $(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$

Poznámka: Tečný vektor se také někdy nazývá vázaný, neboť je "svázán"s bodem a.

Cvičení 1.2.14. *Co myslíme pojmem "nekonečně derivovatelné funkce"na E_n a co znamenají výrazy $\partial_1 f(a)$ na pravé straně (8)?*

Na rozdíl od vzdálenosti, souřadnice tečného vektoru závisejí na volbě souřadné soustavy. Vztahy mezi souřadnicemi vektoru Y_a ve dvou soustavách $k, k' \in \mathcal{K}$ jsou dány vzorci

$$y^i = A^i_j y'^j.$$

Všimněte si, že je-li ψ^i i-tá souřadnice bodu v E_n, pak je rovněž funkcí z $\mathcal{F}(E_n)$ a platí

$$Y_a(\psi^i) = y^i.$$

Od nynějška budeme pracovat téměř výhradně s Eukleidovými prostory E_n a jejich podmnožinami. Pro $n = 2, 3$ obvykle $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$.

2 Křivky

Intuitivně jsou křivky "jednorozměrné podmnožiny"prostoru či roviny např. kružnice nebo šroubovice. Mohou být zadány implicitně (algebraickými rovnicemi) nebo parametricky (jako zobrazení jednorozměrného intervalu).

2.1 Křivky v $\mathbf{R}^n$

Lokální vlastnosti křivek je možno zkoumat pomocí tzv. parametrického zadání elementární křivky:

Definice 2.1.1. *Parametricky zadanou (elementární)* **křivkou** *nazveme zobrazení* $\mathbf{f} : I \to \mathbf{R}^n$*, kde I je interval v $\mathbf{R}$, který může být i (polo)nekonečný.*

Často se křivkou nazývá pouze obor hodnot zobrazení $\mathbf{f}$. Správně se tomuto oboru říká **stopa křivky** (Srovnej okamžitou polohu křídy versus zbylý obrázek na tabuli). **Bodem křivky** pak nazýváme prvek stopy křivky.
Příklad: Astroida: $\mathbf{f}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t),\ t \in< 0, 2\pi >$. Porovnej se stopou křivky $\mathbf{f}(t) = (\cos^3 2t, \sin^3 2t),\ t \in< 0, 2\pi >$.

Cvičení 2.1.1. *Napište parametrické vyjádření cykloidy – křivky kterou opisuje bod kružnice při jejím "kutálení"po tečné přímce.*

Cvičení 2.1.2. *Napište parametrické zadání šroubovice. Je tato křivka dráhou hmotného bodu v nějakém fyzikálním poli?*

Obvykle uvažujeme křivky odpovídající funkcím $\mathbf{f}$ majícím speciální analytické vlastnosti, například že $\mathbf{f}$ je diferencovatelná, nekonečně diferencovatelná či dokonce reálně analytická t. zn. že Taylorův rozvoj v každém bodě konverguje v jistém okolí k funkci $\mathbf{f}$. V dalším budeme předpokládat, že $\mathbf{f}$ *je aspoň jednou spojitě diferencovatelná,* t.j. $\mathbf{f} \in C^1(I)$, často, ale budeme tento požadovek rozšiřovat na vyšší počet derivací.

Další, na první pohled přirozenější způsob, je zadání křivky jako podmnožiny Eukleidova prostoru pomocí tzv. implicitního zadání (stopy) křivky:

Definice 2.1.2. *Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^n$,*

$$\vec{F} : O \to \mathbf{R}^{n-1},\ \vec{F} \in C^1(O).$$

Implicitně zadanou křivkou *nazveme množinu*

$$\alpha = \{\vec{x} \in O \mid F(\vec{x}) = 0\}. \tag{9}$$

Příklad:
$n = 2$: Elipsa: $F(x, y) = a^2x^2 + b^2y^2 - 1$, Descartův list: $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.
$n = 3$: Vivianiho křivka: $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2, (x - R/2)^2 + y^2 - R^2/4)$.

Speciální případ implicitního i parametrického zadání křivky v rovině je graf funkce $y = f(x)$. (Vysvětlete !)

Cvičení 2.1.3. *Sestavte rovnice pro "tažnou křivku"(traktrix) a napište její implicitní vyjádření.*

Ne všechny body implicitně zadané křivky mají tu vlastnost, že jejich okolí připomíná jedno rozměrný objekt.

Cvičení 2.1.4. *Nakreslete Descartův list. Který bod je zvláštní?*

Singulární body implicitně zadané křivky: $F(\vec{x}_0) = 0$ a

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_I}{\partial x_j}\right)(\vec{x}_0) < n - 1.$$

Regulární body implicitně zadané křivky: $F(\vec{x}_0) = 0$ a

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_I}{\partial x_j}\right)(\vec{x}_0) = n - 1.$$

Je třeba si uvědomit, že parametricky a implicitně zadaná křivka jsou matematicky zcela odlišné objekty. V prvním případě se jedná o zobrazení do Eukleidova prostoru, zatímco v druhém případě o jeho podmnožinu. Přechod od parametrického k implicitnímu zadání (stopy křivky) je možno za určitých podmínek uskutečnit vyloučením parametru t z rovnic

$$x^1 = f^1(t), \ldots,\ x^n = f_n(t) : \tag{10}$$

Věta 2.1.1. *Nechť* $\mathbf{f}$ *je parametricky zadaná křivka a* $\dot{f}_n(t_0) \neq 0$. *Pak existuje okolí* (a, b) *bodu* t_0 *a* $n-1$ *funkcí* $\Phi_j,\ j = 1, \ldots, n-1$ *tak že pro* $t \in (a, b)$ $x_j = f_j(t) = \Phi_j(f_n(t)) = \Phi_j(x_n)$, *kde* x_n *leží v okolí* $f_n(t_0)$.

Důsledek: Parametricky zadanou křivku $\mathbf{f}$(t) je možno zadat implicitně v okolí $f_n(t_0)$ způsobem

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}^n | F_j(\vec{x}) = 0, j = 1, \ldots, n-1\},$$

kde $F_j(\vec{x}) := x_j - \Phi_j(x_n) = x_j - f_j(f_n^{-1}(x_n))$.

Příklad: (půl)kružnici $x = \cos t, y = \sin t$ $t \in (0, \pi)$ lze implicitně zapsat

$$\{(x, y) \in \mathbf{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \mid x - \cos(\arcsin(y)) = 0\}$$

Obrácený přechod lze obdržet řešením rovnice $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ v termínech vhodně zvoleného parametru:

Věta 2.1.2. *Nechť $\vec{x}$ je nesingulárním bodem implicitně zadané křivky α (9). Pak existuje jeho okolí v $\mathbf{R}^n$ a parametricky zadaná křivka $\mathbf{f}$ tak, že její stopa je na tomto okolí rovna α.*

Cvičení 2.1.5. *Z implicitního zadání přímky odvoďte její parametrické zadání.*

Cvičení 2.1.6. *Napište implicitní vyjádření cykloidy.*

Cvičení 2.1.7. *Napište parametrické zadání Descartova listu. Jako parametr použjte $t = y/x$ resp. $u = (t+1)^{-1}$. $I =$? Mají tato parametrická zadání stejnou stopu?*

Cvičení 2.1.8. *Přesvědčte se, že*

$$x = a(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}), \;\; y = a \sin t, \;\; t \in (0, \pi) \tag{11}$$

je parametrické zadání tažné křivky. Jaký je geometrický význam parametru t?

Definice 2.1.3. *Nechť $\mathbf{f}$ je parametricky zadaná křivka. Křivka $\dot{\mathbf{f}}$ se nazývá* **rychlost** *křivky $\mathbf{f}$. Body křivky, ve kterých je rychlost nulová se nazývají* **kritické**. *Křivka se nazývá* **regulární** *pokud $|\dot{\mathbf{f}}| \neq 0$ na I.*

Cvičení 2.1.9. *Najděte singulární body implicitně zadaného Descartova listu. Odpovídají tyto body kritickým bodům parametrického zadání?*

Cvičení 2.1.10. *Najděte kritické body cykloidy?*

Cvičení 2.1.11. *Šroubovice se projektuje na rovinu xy přímkami svírajícími s osou z úhel* Θ*. Pro jaké* Θ *bude mít projekce kritické body?*

Cvičení 2.1.12. *Je astroida regulární křivka? Šroubovice?*

Cvičení 2.1.13. *Je Descartův list v parametrizacích cvičení 2.1.7 regulární křivkou?*

Cvičení 2.1.14. *Napište příklad křivky s jednotkovou rychlostí.*

Rychlost regulární křivky určuje směrnici tečny. **Tečna křivky f** v bodě A je přímka g procházející bodem A mající následující vlastnost: Je-li B bod křivky $\mathbf{f}$ blízký k A, $|BA|$ je vzdálenost bodů A, B, $|Bg|$ je vzdálenost bodu B od přímky g, pak

$$\lim_{B\to A} \frac{|Bg|}{|BA|} = 0. \tag{12}$$

Věta 2.1.3. *Nechť* $\mathbf{f}$ *je prosté a* $|\dot{\mathbf{f}}(t_0)| \neq 0$*. Pak směrnice tečny parametricky zadané křivky v bodě* $\mathbf{f}(t_0)$ *je dána rychlostí křivky* $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$

Důsledek: Tečna křivky v bodě $\mathbf{f}(t)$ je zadána parametricky zobrazením

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{f}(t) + k\dot{\mathbf{f}}(t),\ k \in \mathbf{R} \tag{13}$$

nebo implicitně (vyloučením k) rovnicemi

$$[x^j - f^j(t)]\dot{f}^n(t) = [x^n - f^n(t)]\dot{f}^j(t),\ j = 1, \ldots, n-1,\ \dot{f}^n(t) \neq 0. \tag{14}$$

Cvičení 2.1.15. *Nechť*

$$\mathbf{f}(u) = \left(\frac{3a(1-u)u^2}{1-3u+3u^2}, \frac{3a(1-u)^2u}{1-3u+3u^2}\right)$$

(Descartův list v parametrickém zadání). Spočítejte tečny v bodech určených hodnotami parametru $u = 0,\ u = 1/2,\ ,u = 1$*. Jaké body to jsou?*

Tečnu křivky je možno určit i z jejího implicitního vyjádření. Platí např.

Věta 2.1.4. *Nechť křivka je zadána implicitním vyjádřením* $F(\vec{x}) = 0$ *a* $gradF(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ *(t.j.* $(\vec{x}_0)$ *není singulárním bodem). Pak rovnice tečny této křivky v bodě* $(\vec{x}_0)$ *je*

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot gradF(\vec{x}_0) = 0 \tag{15}$$

Z této věty a věty (2.1.3) je zřejmé, že singulární a kritické body jsou nějakým způsobem vyjímečné neb v nich nelze definovat tečnu, přestože z geometrického hlediska může existovat (např. pro $\mathbf{f}(t) = (t^3, t^6)$ v $t = 0$).

Některé křivky, které se nám intuitivně zdají být stejné (např. mají stejnou stopu), je možné převést na sebe reparametrizací.

Definice 2.1.4. *Nechť $\vec{\alpha} : (a, b) \to \mathbf{R}^n$, $\vec{\beta} : (c, d) \to \mathbf{R}^n$ jsou diferencovatelné křivky. Řekneme, že $\vec{\beta}$ je* **reparametrizací** *$\vec{\alpha}$, pokud*

$$\exists h : (c, d) \to (a, b),\ \dot{h} \neq 0 \text{ na } (c, d),\ \vec{\beta} = \vec{\alpha} \circ h. \tag{16}$$

Řekneme, že $\vec{\beta}$ je kladnou (zápornou) reparametrizací $\vec{\alpha}$, pokud $\dot{h} > 0, (< 0)$,

Důsledek: $\dot{\vec{\beta}}(s) = \dot{\vec{\alpha}}(h(s))\dot{h}(s)$.

Neregulárnost křivky v bodě může být dvojího druhu: odstranitelná a neodstranitelná.

Příklad: $\mathbf{f}(t) = (0, t^3)$ není regulární v nule, ale transformací $\mathbf{f} \circ h$, kde $h(t) = t^{1/3}$ ji můžeme zregularizovat.

Definice 2.1.5. *Křivka $\vec{\alpha}$ je* **regularizovatelná v** *t_0, pokud existuje $h : (c, d) \to U_{t_0}$ a $\vec{\beta} = \vec{\alpha} \circ\ h$ tak, že $\dot{\vec{\beta}}(t_0) \neq \vec{0}$.*

Věta 2.1.5. *Nechť rovinná křivka je zadána v parametrickém tvaru.*

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t)$$

Pak v bodě $(f_1(t_0), f_2(t_0)$ křivka není regularizovatelná, pokud v tomto bodě má první nenulová derivace **f** *sudý řád.*

Příklad: (0,0) je neregularizovatelným bodem křivky $\vec{\alpha} = (t^2, t^3)$.

Cvičení 2.1.16. *Nalezněte neregularizovatelné body asteroidy.*

$$x = a\cos^4 t,\ y = a\sin^4 t$$

Cvičení 2.1.17. *Nalezněte neregularizovatelné body tažné křivky.*

Důležitou charakteristikou křivky je délka jejího oblouku, která je i jejím přirozeným parametrem.

Definice 2.1.6. *Nechť* $\mathbf{f} : (a, b) \to \mathbf{R}^n$ *je diferencovatelná křivka a* $[c, d] \subset (a, b)$. **Délkou** $L_{cd}[\mathbf{f}]$ **oblouku křivky** *mezi* $\mathbf{f}(c)$ *a* $\mathbf{f}(d)$ *nazveme supremum délek všech vepsaných lomených čar (zachovávající posloupnost bodů křivky).*

Věta 2.1.6.

$$L_{cd}[\mathbf{f}] = \int_c^d |\dot{\mathbf{f}}(t)| dt \tag{17}$$

Cvičení 2.1.18. *Najděte délku oblouku cykloidy mezi dvěma kritickými body.*

Cvičení 2.1.19. *Najděte délku astroidy*

Věta 2.1.7. *Nechť* $\vec{\beta}$ *je reparametrizací* $\vec{\alpha}$. *Pak* $L_{c'd'}[\vec{\beta}] = L_{cd}[\vec{\alpha}]$.

Délka křivky je přirozeným parametrem regulární křivky:

Věta 2.1.8. *Nechť* $\vec{\alpha}$ *je regulární na* (a, b). *Pak existuje reparametrizace délkou jejího oblouku s počátkem v pevném bodě –* **přirozená parametrizace**. *Příslušná reparametrizace je dána vzorcem*

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\beta}(s(t), \quad s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{\alpha}}(t')| dt', \ t_0, t \in (a, b)$$

kde $\vec{\alpha}(t_0)$ *je bod křivky odpovídající parametru* $s = 0$ *a* $|\dot{\vec{\beta}}| = 1$.

Přirozená parametrizace je určena až na počátek a znaménko:

Věta 2.1.9. *Nechť* $\vec{\beta}$ *je reparametrizace* $\vec{\alpha}$ *a* $|\dot{\vec{\beta}}| = 1 = |\dot{\vec{\alpha}}|$. *Pak*

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(\pm t + t_0)$$

V dalším se omezíme na studium křivek v rovině a prostoru

2.2 Křivky v rovině

Rovinou budeme nadále nazývat Eukleidův dvourozměrný prostor s pevně vybraným systémem kartézských souřadnic. Důležitou charakteristikou rovinných křivek je jejich lokální křivost, která se určuje ze změny tzv. směrového úhlu křivky.

Věta 2.2.1. *Nechť* $\mathbf{f} : (a,b) \to \mathbf{R}^2$ *je regulární rovinná křivka a* θ_0 *je úhel, pro který platí*

$$\frac{\dot{\mathbf{f}}(t_0)}{|\dot{\mathbf{f}}(t_0)|} = (\cos\theta_0, \sin\theta_0).$$

Pak existuje právě jedna spojitá funkce $\theta : (a,b) \to \mathbf{R}$ *tak,* $\theta(t_0) = \theta_0$ *a jednotkový tečný vektor křivky* $\mathbf{f}$ *v bodě* $\mathbf{f}(t)$ *je*

$$\vec{T}(t) = \frac{\Big(\dot{\mathbf{f}}_1(t), \dot{\mathbf{f}}_2(t)\Big)}{|\dot{\mathbf{f}}(t)|} = (\cos\theta(t), \sin\theta(t).$$

Funkce θ se nazývá **směrový úhel rovinné křivky**. **Normála rovinné křivky** v jejím bodě je přímka procházející tímto bodem a kolmá na tečnu.

Cvičení 2.2.1. *Napište rovnici normály pro parametricky zadanou křivku.*

Jednotkový normálový vektor $\vec{N}(t)$ křivky $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{f}(t)$ je definován jako

$$\vec{N}(t) = \frac{\Big(-\dot{\mathbf{f}}_2(t), \dot{\mathbf{f}}_1(t)\Big)}{|\dot{\mathbf{f}}(t)|}. \tag{18}$$

Definice 2.2.1. Lokální křivostí rovinné křivky κ_2 *nazveme změnu směrového úhlu* θ *na jednotku délky v daném bodě*

$$\kappa_2 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

Cvičení 2.2.2. *Ukažte, že lokální křivost kružnice v libovolném bodě je* $1/R$ *a lokální křivost přímky je nula.*

Věta 2.2.2. *Pro parametricky zadanou regulární křivku* $\mathbf{f} \in C^{(2)}$ *je křivost dána vzorcem*

$$\kappa_2[\mathbf{f}] = \frac{\dot{f}_1\ddot{f}_2 - \ddot{f}_1\dot{f}_2}{(\dot{f}_1^2 + \dot{f}_2^2)^{3/2}} \tag{19}$$

Absolutní hodnota převrácené hodnoty křivosti se nazývá (lokální) **poloměr křivosti**.

Cvičení 2.2.3. *Spočítejte poloměr křivosti křivky dané grafem funkce* $y = x^n,\ n = 1, 2, 3, \dots$ *v bodě (0,0).*

Cvičení 2.2.4. *Spočítejte lokální poloměry křivosti elipsy ve všech jejích bodech. Jaké jsou jejich maximální a minimální hodnoty.*

Cvičení 2.2.5. *Spočítejte délku normály v libovolném bodě* A *tažné křivky, kde délkou normály zde rozumíme délku úsečky* AN*, kde* N *je průsečík normály v* A *s asymptotickou osou tažné křivky.*

Cvičení 2.2.6. *Ukažte, že pro tažnou křivku je součin lokálního poloměru křivosti a "délky normály"konstantní.*

Pro derivace tečného a normálového vektoru platí

$$\dot{\vec{T}} = |\dot{\mathbf{f}}|\, \kappa_2\, \vec{N}, \quad \dot{\vec{N}} = -|\dot{\mathbf{f}}|\, \kappa_2\, \vec{T}. \tag{20}$$

Věta 2.2.3. *Pro přirozeně parametrizovanou regulární křivku* $\mathbf{f} \in C^{(2)}$ *platí*

$$\ddot{\vec{\beta}}(s) = \kappa_2(s)(-\dot{\beta}_2(s), \dot{\beta}_1(s)) = \kappa_2[\beta](s)\vec{N}(s). \tag{21}$$

Věta 2.2.4. *Křivost rovinné křivky je až znaménko invariantní vůči reparametrizaci.*

$$\vec{\beta} = \vec{\alpha} \circ h \Rightarrow \ \kappa_2[\vec{\beta}](t) = sign(\dot{h}(t))\, \kappa_2[\vec{\alpha}](h(t))$$

Platí i obrácená věta, ze které plyne, že křivost určuje křivku až na Eukleidovské transformace roviny:

Věta 2.2.5. *Nechť* $\vec{\beta}, \vec{\alpha}$ *jsou dvě přirozeně parametrizované křivky na stejném intervalu* (a, b) *mající stejnou rovinnou křivost. Pak existuje Eukleidovská transformace* $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$*, tak že* $\vec{\beta} = T \circ \vec{\alpha}$

Na druhé straně ke každé spojité (skalární) funkci lze nalézt křivku tak, aby byla její křivostí.

Věta 2.2.6. *Nechť* $k : (a,b) \to \mathbf{R},\ k \in C^0$. *Pak* $\mathbf{f} : (a,b) \to \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{f}(s) := \left(\int_0^s \cos[\theta(s')ds', \int_0^s \sin[\theta(s')ds' \right), \tag{22}$$

kde

$$\theta(s) = \int_0^s k(s')ds' \tag{23}$$

je přirozeně parametrizovaná křivka, jejíž křivost je k.

Vztahu mezi délkou rovinné křivky a její křivostí $\kappa_2 = \kappa_2(s)$ se rovněž říká **přirozená rovnice křivky** – nezávisí na výběru kartézských souřadnic v rovině.

Cvičení 2.2.7. *Určete rovinnou křivku, jejíž křivost je*

$$k(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

Oskulační kružnice křivky v daném bodě je kružnice se středem ležícím na normále v daném bodě ve vzdálenosti lokálního poloměru křivosti od bodu křivky.

Cvičení 2.2.8. *Upřesněte polohu středu oskulační kružnice.*

Množina všech středů oskulačních rovnic pro křivku $\alpha(t)$ se nazývá **evoluta křivky** α. Její parametrické zadání je

$$\vec{E}[\alpha](t) = \vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)}\vec{N}(t), \tag{24}$$

Cvičení 2.2.9. *Napište parametrické zadání evoluty elipsy.*

Cvičení 2.2.10. *Napište parametrické zadání evoluty řetězovky.*

Cvičení 2.2.11. *Ukažte že tečna regulární křivky v bodu* $\vec{\alpha}(t)$ *je vždy kolmá na tečnu evoluty křivky v bodě* $\vec{E}[\alpha](t)$

2.3 Křivky v prostoru

Parametrické zadání: $\mathbf{f} : I \to \mathbf{R}^3$.
Příklad: Šroubovice, $\mathbf{f} = (a\,\cos t, a\,\sin t, b\,t),\ I = \mathbf{R}$.
Implicitní zadání: $F : O \to \mathbf{R}^2,\ O \subset \mathbf{R}^3,\ F \in C^1(O)$

$$\alpha = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3, F(\vec{x}) = 0\}.$$

Příklad: Vivianiho křivka - průnik koule a válce:

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\ (x-a)^2 + y^2 = a^2\}$$

Cvičení 2.3.1. *Najděte singulární body Vivianiho křivky.*

Tvrzení 2.3.1. *Nechť křivka má regulární parametrizaci a $\dot{f}_1(t_0) \neq 0$. Pak v okolí $(x_0 = f_1(t_0), y_0 = f_2(t_0), z_0 = f_3(t_0)) \in \mathbf{R}^3$ lze křivku zadat implicitně rovnicemi*

$$y - \phi(x) = 0,\ z - \psi(x) = 0,$$

kde ϕ, ψ jsou regulární funkce.

Důkaz: <= Věta o implicitním zobrazení.

2.3.1 Tečna, normála a binormála

Rovnice tečny v regulárním bodě $\mathbf{f}(t)$ parametricky zadané křivky:

$$\frac{x - f_1(t)}{\dot{f}_1(t)} = \frac{y - f_2(t)}{\dot{f}_2(t)} = \frac{z - f_3(t)}{\dot{f}_3(t)}$$

Rovnice tečny v regulárním bodě (x_0, y_0, z_0) implicitně zadané křivky α:

$$\frac{x - x_0}{F_{1,y}F_{2,z} - F_{1,z}F_{2,y}} = \frac{y - y_0}{F_{1,z}F_{2,x} - F_{1,x}F_{2,z}} = \frac{z - z_0}{F_{1,x}F_{2,y} - F_{1,y}F_{2,z}}$$

Normálová rovina křivky v bodě A: Rovina kolmá na tečnu v bodě A.

Cvičení 2.3.2. *Napište rovnici normálové roviny v libovolném bodě křivky pro parametricky i implicitně zadanou křivku.*

Definice 2.3.1. *Nechť A, B jsou body křivky γ, g je rovina procházející bodem A, $d := |BA|$, $\delta :=$ vzdálenost B od g. Rovinu g nazveme* **přilehlou** *(oskulační) ke křivce γ v bodě A, pokud*

$$\lim_{B \to A} \frac{\delta}{d^2} = 0$$

Věta 2.3.1. *Parametricky zadaná dvakrát diferencovatelná křivka má v každém svém regulárním bodě přilehlou rovinu. Ta je určena buď jednoznačně vektory $\dot{\mathbf{f}}$, $\ddot{\mathbf{f}}$ (pokud jsou lin. nezávislé) nebo každá rovina obsahující tečnu je přilehlá.*

Cvičení 2.3.3. *Nechť vektory* $\dot{\mathbf{f}}(t)$, $\ddot{\mathbf{f}}(t)$ *jsou lin. nezávislé. Napište rovnici roviny přilehlé ke křivce* $\mathbf{f}$ *v bodě* $\vec{\mathbf{f}}(t)$.

Hlavní normála: Průsečnice normálové a přilehlé roviny.
Binormála: Přímka kolmá na tečnu a hlavní normálu.

Cvičení 2.3.4. *Napište rovnice tečny, přilehlé roviny, hlavní normály a binormály pro libovolný bod šroubovice. Ukažte že hlavní normály protínají osu z.*

Cvičení 2.3.5. *Nechť přilehlé roviny křivky v bodech* $\vec{\mathbf{f}}(t)$ *jsou dány rovnicemi*

$$A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t) = 0.$$

Určete funkci (křivku) $\mathbf{f}$.

2.3.2 Křivost a torze

Délka oblouku prostorové křivky: $L_{cd}[\mathbf{f}] = \int_c^d \sqrt{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2 + \dot{f}_3(t)^2} dt$

Cvičení 2.3.6. *Najděte délku oblouku* $L_{0,T}$ *křivky*

$$\vec{\mathbf{f}}(t) = (cosh\ t, sinh\ t, t)$$

Křivostí prostorové křivky nazveme změnu úhlu tečny na jednotku délky, přesněji:

Definice 2.3.2. *Nechť* A, B *jsou body křivky* γ, $|\Delta\Theta|$ *je velikost úhlu mezi tečnami v bodech* A *a* B, $|\Delta s|$ *je délka oblouku* AB. **Křivostí** κ *křivky* γ *v bodě* A *nazveme*

$$\lim_{B \to A} \frac{|\Delta\Theta|}{|\Delta s|}$$

Všimněte si, že $\kappa \geq 0$.

Věta 2.3.2. *Přirozeně parametrizovaná dvakrát diferencovatelná křivka* $\vec{\beta}$ *má v každém bodě definovanou křivost danou vzorcem*

$$\kappa = |\ddot{\vec{\beta}}(s)|. \tag{25}$$

Cvičení 2.3.7. *Jak vypadá křivka s nulovou křivostí ve všech svých bodech?*

Definice 2.3.3. *Nechť $\vec{\beta}$ je přirozeně parametrizovaná křivka a $\kappa(s) \neq 0$ na nějakém intervalu.* **Triádou** *(reperem, Frenet frame field,...)* **v bodě s** *nazveme trojici $(\vec{T}(s), \vec{B}(s), \vec{N}(s))$, kde $\vec{T}(s) := \dot{\vec{\beta}}(s)$ je tzv. jednotkový tečný vektor, $\vec{N}(s) := \ddot{\vec{\beta}}(s)|\ddot{\vec{\beta}}(s)|^{-1}$ – jednotkový normálový vektor, $\vec{B}(s) := \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$ – jednotkový binormálový vektor.*

Výše zadané vektory definují v každém bodě křivky kartézský souřadný systém, pomocí kterého můžeme vyjádřit libovolný vektor v tomto bodě. "Pohyb"tohoto systému podél křivky vyjadřují derivace jednotkových vektorů tečny, normály a binormály, které jsou určeny tzv. Frenetovými formulemi.

Věta 2.3.3. *(Frenetovy vzorce pro p.p. křivku) Nechť $\vec{\beta}$ je přirozeně parametrizovaná křivka mající nenulovou křivost κ na intervalu (c, d). Pak existuje funkce $\tau : (c, d) \to \mathbf{R}$ tak, že*

$$\dot{\vec{T}}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s) \tag{26}$$

$$\dot{\vec{N}}(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) + \tau(s)\vec{B}(s) \tag{27}$$

$$\dot{\vec{B}}(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) \tag{28}$$

Odvození Frenetových vzorců Předpokládáme, že křivka je zapsána v přirozené parametrizaci. Pak tečna, normála a binormála jsou určeny definicí 2.3.3.

Platí

$$\dot{\vec{\beta}}(s) \cdot \dot{\vec{\beta}}(s) = 1 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{\beta}}(s) \cdot \ddot{\vec{\beta}}(s) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{T} \cdot \vec{N} = 0,$$

takže vektory $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ tvoří v každém bodě křivky ortonormální systém.

Ze vzorce (25) okamžitě plyne (26).

Dále

$$\vec{B} \cdot \vec{T} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{B}} \cdot \vec{T} = -\dot{\vec{T}} \cdot \vec{B} = -\kappa\, \vec{N} \cdot \vec{B} = 0, \tag{29}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = 1 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{B}} \cdot \vec{B} = 0. \tag{30}$$

Z (29), (30) a ortonormality $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ pak plyne, že $\dot{\vec{B}}$ je úměrný $\vec{N}$ neboli existuje funkce τ, tak že platí (28).

Nakonec

$$\dot{\vec{N}} \cdot \vec{N} = 0,\; \vec{N} \cdot \vec{T} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{N}} \cdot \vec{T} = -\dot{\vec{T}} \cdot \vec{N}, \tag{31}$$

$$\vec{N} \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\vec{N}} \cdot \vec{B} = -\vec{N} \cdot \dot{\vec{B}}. \tag{32}$$

Z (31), (32) a již dokázaných rovnic (26), (28) plyne (27).

Funkce τ měří "nerovinnost"křivky. Platí totiž

Věta 2.3.4. *Nechť $\vec{\beta}$ je přirozeně parametrizovaná křivka a $\kappa > 0$ na nějakám intervalu. Pak $\vec{\beta}$ je rovinná $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$.*

Definice 2.3.4. *Nechť křivka $\mathbf{f}$ má jednoznačně definované přilehlé roviny v intervalu (c, d). Označme $\rho(t_1, t_2)$ úhel přilehlých rovin v $\mathbf{f}(t_1)$ a $\mathbf{f}(t_2)$.* **Velikostí torze** *křivky $\mathbf{f}$ v bodě t_0 nazveme*

$$\tilde{\tau}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{|\rho(t, t_0)|}{|s(t, t_0)|}$$

Věta 2.3.5. *Pro regulární p.p křivky $\vec{\beta}$ s nenulovou křivostí je $\tilde{\tau}(t_0) = |\tau(t_0)|$.*

Z tohoto důvodu se funkce τ nazývá torzí křivky. Na rozdíl od křivosti může nabývat i záporných hodnot.

Cvičení 2.3.8. *Nalezněte $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, \kappa, \tau$ pro šroubovici.*

Triádu lze definovat pro libovolnou regulární křivku s positivní křivostí a lze pro ni napsat i Frenetovy vzorce

Definice 2.3.5. *Nechť $\vec{\alpha}$ je regulární křivka, $\vec{\beta}$ její přirozená reparametrizace a, $\ddot{\vec{\beta}} \neq 0$, $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ je triáda křivky $\vec{\beta}$*

$$\vec{T}_{\vec{\beta}}(s) := \dot{\vec{\beta}}(s),\;\; \vec{N}_{\vec{\beta}}(s) := \frac{\ddot{\vec{\beta}}(s)}{|\ddot{\vec{\beta}}(s)|},\;\; \vec{B}_{\vec{\beta}}(s) := \vec{T}_{\vec{\beta}}(s) \times \vec{N}_{\vec{\beta}}(s).$$

Triádou křivky $\vec{\alpha}$ *nazveme*

$$\vec{T}_{\vec{\alpha}}(t) := T_{\vec{\beta}}(s(t)),\;\; \vec{N}_{\vec{\alpha}}(t) := N_{\vec{\beta}}(s(t)),\;\; \vec{B}_{\vec{\alpha}}(t) := B_{\vec{\beta}}(s(t)), \tag{33}$$

kde $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{\alpha}}(t)|$

Z definice křivosti a torze křivky plyne

$$\kappa_{\vec{\alpha}}(t) = \kappa_{\vec{\beta}}(s(t)),\;\; \tau_{\vec{\alpha}}(t) = \tau_{\vec{\beta}}(s(t)) \tag{34}$$

a Frenetovy vzorce lze zobecnit i na obecnou křivku:

Věta 2.3.6. *Pro triádu definovanou (33) platí*

$$\dot{\vec{T}}_{\vec{\alpha}}(t) = |\dot{\vec{\alpha}}(t)|\kappa_{\vec{\alpha}}(t)\vec{N}_{\vec{\alpha}}(t) \tag{35}$$

$$\dot{\vec{N}}_{\vec{\alpha}}(t) = -|\dot{\vec{\alpha}}(t)|\kappa_{\vec{\alpha}}(t)\vec{T}_{\vec{\alpha}}(t) + |\dot{\vec{\alpha}}(t)|\tau_{\vec{\alpha}}(t)\vec{B}_{\vec{\alpha}}(t) \tag{36}$$

$$\dot{\vec{B}}_{\vec{\alpha}}(t) = -|\dot{\vec{\alpha}}(t)|\tau_{\vec{\alpha}}(t)\vec{N}_{\vec{\alpha}}(t). \tag{37}$$

Ze vzorce (25) lze spočítat i vzorce pro křivost a torzi křivky v libovolné parametrizaci

$$\kappa_{\vec{\alpha}} = \frac{|\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}|}{|\dot{\vec{\alpha}}|^3}, \quad \tau_{\vec{\alpha}} = \frac{(\dot{\vec{\alpha}}, \ddot{\vec{\alpha}}, \dddot{\vec{\alpha}})}{|\dot{\vec{\alpha}} \times \ddot{\vec{\alpha}}|^2}. \tag{38}$$

(Porovnej s (19).)

Cvičení 2.3.9. *Ukažte že pohyb částice v centrálním potenciálovém poli je rovinný.*

Křivost a torze jsou "vnitřními charakteristikami křivky"nezavislými na jejím vnoření do prostoru:

Věta 2.3.7. *Křivost a torze prostorové křivky je invariantní vůči vlastním Eukleidovým transformacím $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$, kde $A \in SO(3), \vec{b} \in \mathbf{R}^3$. Při nevlastní Eukleidově transformaci (*$\det A = -1$*) změní torze znaménko.*

Hlavní význam křivosti a torze spočívá v tom, že prostorová křivka je určena křivostí a torzí ve všech svých bodech jednoznačně až na umístění v prostoru:

Věta 2.3.8. *Nechť k, q jsou diferencovatelné funkce na intervalu (a,b), $k > 0$. Pak existuje přirozeně parametrizovaná křivka $\vec{\beta} : (a, b) \to \mathbf{R}^3$ jejíž křivka a torze je rovna k, resp. q.*

Věta 2.3.9. *Nechť $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ jsou dvě regulární křivky, definované na stejném intervalu a mající na něm stejnou positivní křivost a torzi. Pak existuje vlastní Eukleidovské zobrazení $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tak, že $\vec{\beta} = F \circ \vec{\alpha}$.*

Jednoduchým důsledkem této věty je, že libovolná křivka s konstantní křivostí a torzí je šroubovice nebo kružnice.

Cvičení 2.3.10. *Řešte Frenetovy vzorce pro τ, $\kappa = const$.*

2.4 Oskulační sféra, sférické křivky

Definice 2.4.1. *Dvourozměrnou sféru S_2 nazveme* **oskulační k prostorové křivce $\vec{\alpha}$ v bodě** $\vec{\alpha}(t)$ *pokud má s křivkou $\vec{\alpha}$ dotyk třetího řádu.*

Věta 2.4.1. *Nechť, $\vec{\beta}(s)$ je přirozeně parametrizovaná prostorová křivka. Pak střed oskulační sféry k prostorové křivce $\vec{\beta}$ v bodě $\vec{\beta}(s_0)$ je v v bodě*

$$\vec{m}(s_0) = \vec{\beta}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\vec{N}(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)}\vec{B}(s_0), \tag{39}$$

kde

$$\kappa(s) = \kappa_\beta(s),\ \tau(s) = \tau_\beta(s),\ \vec{N}(s) = \vec{N}_\beta(s),\ \vec{B}(s) = \vec{B}_\beta(s).$$

Její poloměr je $r_0 = |\vec{\beta}(s_0)|$.

Důkaz: Nechť $\vec{V}(s) := \vec{\beta}(s) - \vec{m}(s_0)$ a $\vec{\gamma}(s)$ je křivka daná průmětem $\vec{\beta}(s)$ na oskulační sféru, takže

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{m}(s_0) + \vec{V}(s)\frac{r_0}{r(s)}, \tag{40}$$

kde $r(s) = |\vec{V}(s)|$

$$a\vec{\gamma}'(s) = r_0\left(\frac{\vec{V}(s)}{r(s)}\right)' = \frac{r_0}{r(s)}(\vec{V}'(s)r(s) - \vec{V}(s)r'(s)).$$

Zapíšeme-li vektor $\vec{V}$ ve složkách ortonormální baze $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$

$$\vec{V}(s) = a(s)\vec{T}(s) + b(s)\vec{N}(s) + c(s)\vec{B}(s),$$

dostaneme $r'(s) = a(s)r(s)$. Křivky $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ mají dotyk třetího řádu v $\vec{\beta}(s_0)$, což znamená, že

$$\vec{\gamma}(s_0) = \vec{\beta}(s_0),\ \vec{\gamma}'(s_0) = \vec{\beta}'(s_0),\ \vec{\gamma}''(s_0) = \vec{\beta}''(s_0),\ \vec{\gamma}'''(s_0) = \vec{\beta}'''(s_0).$$

Z rovnosti prvních derivací v s_0 pak plyne $a(s_0) = 0$. Podobně (i když s větším úsilím) z rovnosti druhých a třetích derivací

$$\vec{\gamma}''(s) = r_0\left(\frac{\vec{V}(s)}{r(s)}\right)'' = \frac{r_0}{r}\left[V(2r'^2 - r\,r'') + r(V''r - 2r'V')\right]$$

$$\vec{\gamma}'''(s) = r_0 \left(\frac{\vec{V}(s)}{r(s)} \right)''' = ...$$

v s_0 plyne

$$b(s_0) = 1/\kappa(s_0), \quad c(s_0) = \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)}.$$

Z rozkladu $\vec{V}$ v s_0 pak dostaneme (39).

Sférickými prostorovými křivkami pak nazýváme ty, které leží na sféře S_2, která je tedy zároveň jejich oskulační sférou. Středy oskulačních sfér $m(s)$ pro libovolný bod sférické křivky $\vec{\beta}(s)$ jsou tedy stejné, takže $\vec{m}'(s) = 0$.

Cvičení 2.4.1. *Sférická šroubovice. Napište parametrické vyjádření křivky, která začíná na "Jižním pólu"sféry, končí na "Severním pólu"a n-krát obkrouží sféru.*

Věta 2.4.2. *Pro libovolnou sférickou křivku $\vec{\alpha}(t)$ platí*

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{1}{|\dot{\vec{\alpha}}(t)|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{1}{|\dot{\vec{\alpha}}(t)|}\dot{\kappa}}{\tau\kappa^2} B(s) \right) \tag{41}$$

Důkaz: Pro přirozeně parametrizovanou křivku dostaneme ze vzorce (39)

$$\begin{aligned}
\vec{m}'(s) =& \frac{d}{ds} \left[\vec{\beta}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{N}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} B(s) \right]' \\
=& T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\vec{N} + \frac{1}{\kappa}\vec{N}' - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} B' \\
=& T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\vec{N} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' B - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}(-\tau N)] \\
=& B \left[\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} \right)' \right].
\end{aligned}$$

Z $\vec{m}'(s) = 0$ pak dostáváme pro přirozeně parametrizovanou křivku

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{\kappa'(s)}{\tau(s)\kappa^2(s)} \right)'.$$

Pro libovolnou $C^{(3)}$ křivku α ze substituce $\vec{\beta}(s) = \alpha(t(s))$ a

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\dot{\vec{\alpha}}(t)|} \frac{d}{dt}$$

plyne (41).

Cvičení 2.4.2. *Prověřte, že Vivianiho křivka splňuje* (41).

Z věty 2.4.2 plyne že pro sférické křivky torze a křivost nejsou nezávislé veličiny, takže není překvapivé že se dají vyjádřit jednou funkcí.

Věta 2.4.3. *Pro sférickou přirozeně parametrizovanou křivku existuje $C^{(3)}$ funkce J, tak že*

$$\kappa^2(s) = 1 + J^2(s) > 0, \quad \tau(s) = \frac{J'(s)}{\kappa^2(s)} \tag{42}$$

Důkaz: Derivací $|\vec{\beta}| = 1,\ |\vec{\beta}'| = 1$ dostaneme

$$\langle \vec{\beta}, \vec{\beta}' \rangle = 0,\ \langle \vec{\beta}', \vec{\beta}' \rangle = 1,\ \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}'' \rangle = -1,\ \langle \vec{\beta}', \vec{\beta}'' \rangle = 0,\ \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}''' \rangle = 0 \tag{43}$$

Trojice $\{\vec{\beta}, \vec{\beta}', \vec{\beta} \times \vec{\beta}'\}$ pak tvoří ortonormální bazi v každém bodě křivky $\vec{\beta}$, takže

$$\vec{\beta}'' = \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}'' \rangle \vec{\beta} + \langle \vec{\beta}', \vec{\beta}'' \rangle \vec{\beta}' + \langle \vec{\beta} \times \vec{\beta}', \vec{\beta}'' \rangle\, (\vec{\beta} \times \vec{\beta}') = -\vec{\beta} + J\ (\vec{\beta} \times \vec{\beta}'), \tag{44}$$

kde

$$J = (\vec{\beta}, \vec{\beta}', \vec{\beta}''). \tag{45}$$

Odtud

$$\kappa^2 = \langle \vec{\beta}'', \vec{\beta}'' \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}'' \rangle^2 \vec{\beta}^2 + +J^2 (\vec{\beta} \times \vec{\beta}')^2 = 1 + J^2.$$

Z Frenetových vzorců a (44),(45)

$$\begin{aligned} \tau =& -\langle B', N \rangle = -\langle [\vec{\beta}' \times \frac{\vec{\beta}''}{\kappa}]', \frac{\vec{\beta}''}{\kappa} \rangle \\ =& -\frac{1}{\kappa^2} \langle [\vec{\beta}' \times \vec{\beta}'']', \vec{\beta}'' \rangle = -\frac{1}{\kappa^2} \langle [\vec{\beta}' \times \vec{\beta}'']', -\vec{\beta} + J\, [\vec{\beta} \times \vec{\beta}'] \rangle \\ =& \frac{1}{\kappa^2} \langle [\vec{\beta}' \times \vec{\beta}''']', \vec{\beta} \rangle = \frac{1}{\kappa^2} (\vec{\beta}', \vec{\beta}''', \vec{\beta}) = \frac{J'}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

3 Plochy v $\mathbf{R}^3$

3.1 Pojem plochy

Definice 3.1.1. Parametricky zadanou *(elementární)* **plochou** *v prostoru nazveme zobrazení* $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{f} : (u, v) \mapsto (x, y, z)$, *kde* Ω *je otevřená jednoduše souvislá podmnožina v* $\mathbf{R}^2$ *a* $\mathbf{f}$ *je aspoň jednou spojitě diferencovatelná na* Ω. *Křivky* $\mathbf{f}(u, v_0)$, $\mathbf{f}(u_0, v)$ *jsou tzv.* **souřadnicové čáry** *zadané plochy.*

Příklad: Parametricky zadaný povrch koule:

$$\Omega = \mathbf{R}^2,\ \mathbf{f} : (u,v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v).$$

Cvičení 3.1.1. *Helikoid je geometricky definován jako plocha vytvořená přímkou rotující kolmo na danou osu, která se podél ní navíc pohybuje – obojí s konstantní rychlostí. Napište její parametrizaci.*

Cvičení 3.1.2. *Napište parametrizaci Möbiova listu.*

Definice 3.1.2. *Parametricky zadaná plocha je* **regulární v bodě** (u_0, v_0) *pokud*

$$\mathit{Rank}\left[\begin{pmatrix} f_{1,u} & f_{2,u} & f_{3,u} \\ f_{1,v} & f_{2,v} & f_{3,v} \end{pmatrix}(u_0, v_0)\right] = 2. \tag{46}$$

Parametricky zadaná plocha je regulární pokud je regulární v každém bodě Ω *(immersion, vnoření).*

Věta 3.1.1. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
i)Parametricky zadaná plocha je regulární v bodě (u_0, v_0).

$$ii) \quad \det\begin{pmatrix} \vec{f}_u \cdot \vec{f}_u & \vec{f}_u \cdot \vec{f}_v \\ \vec{f}_u \cdot \vec{f}_v & \vec{f}_v \cdot \vec{f}_v \end{pmatrix}(u_0, v_0) \neq 0.$$

iii) Vektory $\vec{f}_u(u_0, v_0), \vec{f}_v(u_0, v_0)$ *jsou lineárně nezávislé.*

Příklad: Povrch koule je regulární pro $v \neq (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Pro $\Omega = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ je navíc injektivní.

Cvičení 3.1.3. *Je Möbiův list regulární plocha? Pro jaký obor souřadnic?*

Věta 3.1.2. *Je-li parametricky zadaná plocha regulární a injektivní, pak* $\mathbf{f}$ *je difeomorfismus* $\Omega \to \mathbf{f}(\Omega)$.

Důkaz: Věta o inverzní funkci.

Definice 3.1.3. *Podmnožinu* $S \subset \mathbf{R}^3$ *nazveme* **regulární plochou** *pokud pro každý její bod existuje okolí* $U \subset \mathbf{R}^3,\ \Omega \subset \mathbf{R}^2$ *a zobrazení* $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{R}^3$*, které*
i) je homeomorfismem Ω *a* $S \cap U$.
ii) je regulární parametricky zadanou plochou.

Zobrazení $\mathbf{f}$ vytvářejí na regulární ploše tzv. lokální systémy souřadnic.
Příklad: Povrch koule v $\mathbf{R}^3$ je regulární plocha.

Definice 3.1.4. Implicitně zadanou plochou *v prostoru nazveme množinu* $S := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \phi(\vec{x}) = 0\}$*, kde* $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *je aspoň jednou spojitě diferencovatelná.*

Bod (x_0, y_0, z_0) je **regulárním bodem** implicitně zadané plochy, pokud

$$grad\ \phi(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Bod (x_0, y_0, z_0) je **singulárním bodem** implicitně zadané plochy, pokud

$$grad\ \phi(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0).$$

Věta 3.1.3. *Nechť*

$$\begin{vmatrix} f_{1,u} & f_{2,u} \\ f_{1,v} & f_{2,v} \end{vmatrix} (u, v) \neq 0.$$

Pak v okolí $\vec{f}(u, v)$ *existuje implicitní vyjádření plochy ve tvaru* $z = F(x, y)$*.*

Důkaz: Věta o implicitním zobrazení.

3.2 Tečná rovina

Normála plochy v bodě A je přímka procházející bodem A kolmá na tečnou rovinu v bodě A. Je zřejmé, že pro parametricky zadanou plochu má v bodě $\vec{f}(u, v)$ směr vektoru $\vec{f}_u(u, v) \times \vec{f}_v(u, v)$. Její parametrické zadání tedy je

$$\vec{n}(t) = \vec{f}(u, v) + t\, \vec{f}_u(u, v) \times \vec{f}_v(u, v) \tag{47}$$

Definice 3.2.1. *Nechť* A, B *jsou body plochy* S *a* g *je rovina procházející bodem* A*,* $d := |BA|$*,* $\delta :=$ *vzdálenost* B *od* g*. Rovinu* g *nazveme* **tečnou** *k* S *v bodě* A*, pokud*

$$\lim_{B \to A} \frac{\delta}{d} = 0$$

Tečná rovina parametricky zadané regulární plochy v bodě $\vec{f}(u, v)$ je rovnoběžná s vektory $\vec{f}_u(u, v)$, $\vec{f}_v(u, v)$

$$g = \vec{f}(u, v) + T_{\vec{f}(u,v)},$$

kde $T_{\vec{f}(u,v)}$ je tzv. **tečný vektorový prostor v bodě** $\vec{f}(u,v)$

$$T_{\vec{f}(u,v)} := Span(\{\vec{f}_u, \vec{f}_v\}).$$

Tečná rovina je implicitně dána rovnicí

$$(\vec{x} - \vec{f}(u,v)) \cdot (\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)) = \begin{vmatrix} x - \vec{f}_1(u,v) & y - \vec{f}_2(u,v) & z - \vec{f}_3(u,v) \\ f_{1,u}(u,v) & f_{2,u}(u,v) & f_{3,u}(u,v) \\ f_{1,v}(u,v) & f_{2,v}(u,v) & f_{3,v}(u,v) \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

Tečná rovina v bodě (x_0, y_0, z_0) implicitně zadané plochy je dána rovnicí

$$(x - x_0)\phi_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\phi_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\phi_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \tag{49}$$

Gaussovo zobrazení: $\vec{n} : \Omega \to S_2$, $(u,v) \mapsto \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)}{|\vec{f}_u(u,v) \times \vec{f}_v(u,v)|}$

Cvičení 3.2.1. *Nechť* $\mathbf{f}(u,v)$ *je plocha, kterou dostaneme rotací křivky* $x = \phi(u)$, $z = \psi(u)$ *okolo osy* z*. Ukažte, že všechny její normály protínají osu* z*.*

3.3 První fundamentální forma

Nadále budeme předpokládat, že $\vec{f}$ představuje regulární parametricky zadanou elementární plochu a zavedeme tzv. první fundamentální formu plochy, která se ukáže být užitečná pro výpočet některých vlastností objektů na této ploše žijících.

3.3.1 Délka křivky na ploše

Vzdálenost bodů plochy $\vec{f}(u_1, v_1)$, $\vec{f}(u_2, v_2)$ je možno definovat jako infimum délek všech křivek spojujících tyto body a ležících na ploše $\vec{f}$. Každé takové křivce lze přiřadit rovinou křivku $(u(t), v(t))$, která je jejím vzorem v Ω, přesněji:

Věta 3.3.1. *Nechť* $\vec{\gamma} : (a,b) \to \mathbf{R}^3$ *je křivka jejíž stopa leží na parametricky zadané ploše* $\vec{f} : \Omega \to \vec{f}(\Omega) \subset \mathbf{R}^3$*, která je navíc homeomorfismem. Pak existuje právě jedna rovinná křivka* $\alpha : (a,b) \to \mathbf{R}^2$*, tak, že* $\vec{\gamma} = \vec{f} \circ \alpha$*.*

Důkaz: $\gamma := \vec{f}^{-1} \circ \vec{\alpha}$

Nechť tedy křivka ležící na parametricky zadané ploše je dána složeným zobrazením

$$(x(t), y(t), z(t)) = \vec{f}(\alpha(t)) = \vec{f}((u(t), v(t)). \tag{50}$$

Délka oblouku této křivky je pak dána vzorcem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\vec{f}_u^2 \dot{u}(t')^2 + 2\vec{f}_u \vec{f}_v \dot{u}(t')\dot{v}(t') + \vec{f}_v^2 \dot{v}(t')^2} dt' \tag{51}$$

a vedle zobrazení $\alpha : I \to \Omega \subset \mathbf{R}^2$ je dána elementy tzv. **první fundamentální formy** plochy.

$$g_{11} \equiv g_{uu} \equiv E := \vec{f_u}^2,\ g_{12} = g_{21} \equiv g_{uv} \equiv F := \vec{f_u} \cdot \vec{f_v},\ g_{22} \equiv g_{vv} \equiv G := \vec{f_v}^2. \tag{52}$$

Znamená to, že první fundamentální forma je zúžením skalárního součinu v $\mathbf{R}^3$ na tečné roviny plochy $\vec{f}(\Omega)$.

Cvičení 3.3.1. *Nalezněte první fundamentální formu pro kouli, torus, šroubovou plochu.*

První fundamentální forma se také často nazývá **metrický tenzor** plochy. Ze vzorce (51) plyne, že

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk} \dot{\alpha}^j \dot{\alpha}^k,$$

což se často symbolicky zapisuje způsobem

$$ds^2 = g_{jk} d\alpha^j d\alpha^k.$$

Z věty (3.1.1) plyne že pro regulární plochy je první fundamentální forma nedegenerovaná. Že se skutečně transformuje jako tenzor ukazuje

Věta 3.3.2. *Nechť S je regulární plocha v prostoru, $\vec{f} : \Omega \to S$, $\vec{f'} : \Omega' \to S$, jsou elementární plochy a $\Sigma := \vec{f}(\Omega) \cap \vec{f'}(\Omega') \neq \emptyset$,*

$$h : f'^{-1}(\Sigma) \to f^{-1}(\Sigma),\quad h : (u, v) \mapsto (u', v') = (\vec{f'}^{-1} \circ \vec{f})(u, v),$$

takže $\vec{f}'(u', v') = \vec{f}(u, v)$. *Nechť na* Σ *jsou indukovány první fundamentální formy*

$$g_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{f}_k, \quad g'_{j'k'} = \vec{f}'_{j'} \cdot \vec{f}'_{k'}.$$

Pak

$$g_{jk}(u, v) = g_{j'k'}(u', v') \frac{\partial u'^{j'}}{\partial u^j}(u, v) \frac{\partial u'^{k'}}{\partial u^k}(u, v) \tag{53}$$

3.3.2 Úhel mezi křivkami

Nechť jsou dány dvě prostorové křivky ležící na stejné parametricky zadané ploše zobrazeními

$$\vec{\gamma}_1(t) := (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \vec{f}(\alpha_1(t)) = \vec{f}((u_1(t), v_1(t)) =: \vec{f}_1(t).$$

$$\vec{\gamma}_2(t) := (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = \vec{f}(\alpha_2(t)) = \vec{f}((u_2(t), v_2(t)) =: \vec{f}_2(t).$$

procházející jedním bodem, t.j. existují parametry t_1, t_2, takové , že

$$(x, y, z) = \vec{f}((u_1(t_1), v_1(t_1)) = \vec{f}((u_2(t_2), v_2(t_2)).$$

Úhel těchto křivek ve společném bodě je pak dán úhlem jejich tečných vektorů a snadno lze spočítat, že

$$\cos\Theta = \left\langle \frac{\dot{\vec{f}}_1(t_1)}{|\dot{\vec{f}}_1(t_1)|}, \frac{\dot{\vec{f}}_2(t_2)}{|\dot{\vec{f}}_2(t_2)|} \right\rangle = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2}\,\sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}} \tag{54}$$

Z tohoto vzorce je vidět, že úhel mezi dvěma křivkami na ploše je opět dán jejich (rovinnými) souřadnicemi a první fundamentální formou. Mimo to ze vzorce (54) lze snadno odvovodit, že pokud $F = 0$ (což je případ mnoha vhodně parametricky zadaných ploch, například sféry, toru, Moebiova listu, . . .), pak obrazy souřadnicových čar $u = u_0$ a $v = v_0$ jsou na ploše $\vec{f}$ ortogonální.

Cvičení 3.3.2. *nalezněte úhel, pod kterým se protínají souřadnicové čáry* $x = x_0, y = y_0$ *na ploše* $z = axy$.

Cvičení 3.3.3. *Ukažte, ze na (šroubové) ploše*

$$\vec{f}(u, v) = (au\cos v, au\sin v, bv) \tag{55}$$

je souřadnicová síť $u = u_0, v = v_0$ *ortogonální.*

3.3.3 Obsah plochy

Vzhledem k tomu, že obraz elementu plochy $(u, u + du) \times (v, v + dv)$ v $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je "až na členy vyšších řádů"rovnoběžník se stranami $\vec{f}_u du, \vec{f}_v dv$, jehož obsah je $|\vec{f}_u \times \vec{f}_v|\, du\, dv$, je obsah plochy $\vec{f}(\Omega)$ roven

$$A(\Omega) = \int_\Omega \int |\vec{f}_u \times \vec{f}_v| dudv \tag{56}$$

Ukazuje se, že tento obsah je opět dán první fundamentální formou, neboť využitím identity

$$[\vec{A} \times \vec{B}] \cdot [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \tag{57}$$

dostaneme

$$A(\Omega) = \int_\Omega \int \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \int_\Omega \int \sqrt{\det g}\, dudv \tag{58}$$

Cvičení 3.3.4. *Určete obsah plochy čtyřúhelníka na šroubové ploše*

$$\vec{f}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

ohraničené křivkami $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$.

Cvičení 3.3.5. *Určete plošný obsah toru.*

Cvičení 3.3.6. *Ukažte, že obsah ploch na paraboloidech*

$$z = \frac{a}{2}(x^2 + y^2), \quad z = axy$$

projektující se na stejnou oblast roviny xy jsou stejné.

3.3.4 Rovnice geodetiky

Vyjádření délky křivky na ploše pomocí metrického tenzoru lze využít k odvození rovnice pro geodetiku, což je nejkratší křivka spojující body

$$\vec{f}(\alpha(t_0)) = \vec{f}((u(t_0), v(t_0)), \quad \vec{f}(\alpha(t)) = \vec{f}((u(t), v(t)).$$

Rovnici pro tuto křivku získáme variačním počtem jako extremálu funkcionálu délky

$$s[u, v] = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}(u, v)\, \dot{u}^j \dot{u}^k}\; dt', \quad u^1 = u, u^2 = v, \tag{59}$$

kde předpokládáme, že je dán metrický tenzor plochy $g_{jk}(u,v)$. Z Euler-Lagrangeových rovnice pro extremálu funkcionálu (59)

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial s}{\partial \dot{u}^j} + \frac{\partial s}{\partial u^j} = 0$$

dostaneme

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{jk}\dot{u}^k}{\sqrt{\Sigma}}\right) + \frac{g_{kn,j}\dot{u}^k\dot{u}^n}{2\sqrt{\Sigma}} = 0, \qquad (60)$$

kde

$$\Sigma = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}(u,v)\,\dot{u}^j\dot{u}^k, \quad g_{kn,j} = \frac{\partial g_{kn}}{\partial u^j}.$$

Rovnice (60) je značně komplikovaná a lze ji zjednodušit přechodem do přirozené parametrizace

$$u^j(t) \mapsto U^j(s) := u^j(t(s)), \quad s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma}\, dt'.$$

Odtud

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\Sigma}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}},$$

$$\dot{U}^j = \frac{dU^j}{ds} = \frac{du^j}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{u}^j\frac{1}{\sqrt{\Sigma}}. \qquad (61)$$

Dosazením (61) do (60) dostaneme

$$\frac{d}{ds}\left(g_{jk}(U)\frac{dU^k}{ds}\right) = \frac{1}{2}g_{kn,j}(U)\dot{U}^k\dot{U}^n,$$

což je ekvivalentní

$$g_{jk}(U)\frac{d^2U^k}{ds^2} = -\Gamma_{knj}\dot{U}^k\dot{U}^n, \qquad (62)$$

kde

$$\Gamma_{knj} = \frac{1}{2}\left(g_{jk,n} + g_{nj,k} - g_{kn,j}\right) = \Gamma_{nkj}.$$

Vynásobením maticí $(g^{-1})^{lj}$ dostaneme rovnici geodetiky v přirozené parametrizaci

$$\ddot{U}^l + \Gamma_{kn}{}^{l}\dot{U}^k\dot{U}^n = 0, \qquad (63)$$

kde

$$\Gamma_{kn}{}^{l} = (g^{-1})^{lj}\,\Gamma_{knj} = \Gamma_{nk}{}^{l}.$$

Řešení $U^k(s)$ rovnice (63) pak určují geodetiky na ploše $\vec{f}(U^1,U^2)$. Všimněte si, že jsou určeny pouze její první fundamentální formou.

3.4 Plochy druhého řádu

Nejjednodušší plochy jsou roviny – plochy prvního řádu (viz kapitola 1.2).

Definice 3.4.1. *Plochou druhého řádu nazveme plochu implicitně zadanou polynomem druhého stupně v* x, y, z.

Plochy druhého řádu je možno úplně klasifikovat. Především platí:

Věta 3.4.1. *Nechť* α *je plocha druhého řádu. Pak existuje soustava souřadná v* $\mathbf{R}^3$, *ve které její implicitní zadání má tvar*

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \tag{64}$$

Další kroky klasifikace záleží na tom, kolik a_j je nulových.

1. Nechť $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ a_3 \neq 0$. Pak existuje soustava souřadná ve které implicitní zadání plochy je

   $$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + d = 0 \tag{65}$$

   V závislosti na d a relativním znaménku všech koeficientů dostáváme následující plochy:

   - $d = 0$: kužel, (singulární) bod $(0, 0, 0)$.
   - $d \neq 0$: elipsoid, jednolistý hyperboloid, dvoulistý hyperboloid.

2. Nechť $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ a_3 = 0$. Pak existuje soustava souřadná ve které implicitní zadání plochy je

   $$a_1x^2 + a_2y^2 + bz + d = 0 \tag{66}$$

   V závislosti na b, d a relativním znaménku všech koeficientů dostáváme následující plochy:

   - $b = d = 0$: (singulární) osa z, dvojice rovin procházejících osou z symetrických vůči rovině zy.
   - $b = 0,\ d \neq 0$: eliptický válec, hyperbolický válec.

- $b \neq 0$: eliptický paraboloid, hyperbolický paraboloid.

3. Nechť $a_1 \neq 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$. Pak existuje soustava souřadná ve které implicitní zadání plochy je

$$a_1x^2 + by + d = 0 \tag{67}$$

V závislosti na b dostáváme následující plochy:

- $b = 0$: dvojice rovin rovnoběžných s rovinou yz a symetrických vůči ní.
- $b \neq 0$: parabolický válec.

3.5 Přilehlý paraboloid, klasifikace bodů plochy, indikatrix křivosti

Definice 3.5.1. *Nechť A, B jsou body regulární plochy S a g je paraboloid (parabolický válec, rovina) procházející bodem A s osou totožnou s normálou plochy v bodě A. Označme B' průsečík paraboloidu a přímky rovnoběžné s normálou a procházející bodem B, $\delta := |BB'|$, $d := |AB|$. Paraboloid g nazveme* **přilehlý** *k ploše S v bodě A, pokud*

$$\lim_{B \to A} \frac{\delta}{d^2} = 0$$

Věta 3.5.1. *Parametricky zadaná dvakrát diferencovatelná rovina má v každém svém bodě přilehlý paraboloid určený jednoznačně. Je li v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) plocha zadána způsobem $z = f(x, y)$, pak přilehlý paraboloid je zadán Taylorovým rozvojem funkce f v bodě (x_0, y_0) do druhého řádu.*

Cvičení 3.5.1. *Nalezněte rovnici přilehlého paraboloidu elipsoidu*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

v bodě $(0, 0, c)$.

Podle typů přilehlého paraboloidu v daném bodě plochy rozdělujeme body plochy na eliptické, hyperbolické, parabolické a body zploštění.

Eliptický bod plochy: přilehlý paraboloid je eliptický.
Hyperbolický bod plochy: přilehlý paraboloid je hyperbolický.
Parabolický bod plochy: přilehlý paraboloid je parabolický válec.
Bod zploštění plochy: přilehlý paraboloid je rovina.

Pro každý bod plochy, který není bodem zploštění, je možno definovat (Dupinovu) indikatrix křivosti, která jej charakterizuje a kterou dostaneme jako projekci řezu přilehlého paraboloidu rovinou paralelní s tečnou rovinou ve vzdálenosti $1/2$. Z klasifikace praboloidů plyne, že indikatrix křivosti může být elipsa, dvojice hyperbol nebo parabolický válec. **Hlavní směry** plochy v bodě A jsou pak směry hlavních os indikatrix křivosti.

Nechť indikatrix křivosti v bodě A je elipsa. Pak A je eliptickým bodem plochy. Pokud indikatrix křivosti v bodě A je dvojice hyperbol se společnými asymptotami, pak A je hyperbolickým bodem plochy (sedlový bod). Pokud indikatrix křivosti v bodě A je dvojice přímek, pak A je parabolickým bodem plochy.

Cvičení 3.5.2. *Nalezněte indikatrix křivosti elipsoidu*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

v bodě $(0, 0, c)$ *a křivosti v jejích hlavních směrech.*

Křivosti plochy v daném bodě jsou určeny křivostmi křivek procházejícími tímto bodem v hlavních směrech. V dalších kapitolách ukážeme jak tyto charakteristiky počítat z parametrického zadání plochy.

3.6 Druhá fundamentální forma

Lze snadno spočítat, že první fundamentální formy roviny a válce jsou ve vhodných souřadnicích stejné. Znamená to, že první fundamentální forma neurčuje plochu úplně. Zavedeme proto další charakteristiku plochy – druhou fundamentální formu, která, jak se později ukáže, bude spolu s první plochu zcela určovat.

Nechť křivka $\vec{\beta}(s)$ ležící na parametricky zadané ploše $S = \vec{f}(\Omega)$ je dána složeným zobrazením

$$\vec{\beta}(s) := \vec{f}(\alpha(s)) = \vec{f}((u(s), v(s)), \tag{68}$$

kde s je přirozený parametr křivky $\vec{\beta}$. Z definice 2.3.3 a vzorce (25) plyne

$$\kappa_\beta \vec{\nu} = \vec{\beta}_{ss}, \tag{69}$$

kde $\vec{\nu}$ je jednotkový normálový vektor křivky $\vec{\beta}$. Vynásobíme-li skalárně tuto rovnost jednotkovým vektorem normály plochy $\vec{n} = \vec{f}_u \times \vec{f}_v / |\vec{f}_u \times \vec{f}_v|$ dostaneme

$$\vec{\beta}_{ss} \cdot \vec{n} = \kappa_\beta \cos\theta(\vec{n}, \vec{\nu}), \tag{70}$$

kde θ je úhel mezi vektory $\vec{\nu}$, $\vec{n}$. Z vyjádření (68) křivky $\vec{\beta}$ jednoduchými i když poněkud zdlouhavými úpravami dostaneme pro libovolnou regulární křivku $\vec{\alpha}$ na otevřené množině Ω Mesnieurův vzorec

$$\kappa_\alpha \cos\theta(\vec{n}, \vec{\nu}) = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} =: \kappa_n, \tag{71}$$

kde

$$L := \vec{f}_{uu} \cdot \vec{n},\ M := \vec{f}_{uv} \cdot \vec{n},\ N := \vec{f}_{vv} \cdot \vec{n}, \tag{72}$$

jsou elementy tzv. **druhé fundamentální formy** plochy $\vec{f}$. Z tohoto vzorce plyne, že výraz (70) závisí pouze na směru tečného vektoru rovinné křivky $\alpha(s) \in \Omega$, nikoliv na jeho velikost, takže veličině κ_n je možno dát názornou geometrickou interpretaci: Vezmeme-li totiž křivku α tak, že stopa $\vec{\beta}$ je tzv. **normálový řez plochy**, t.j. průnik plochy S a roviny kolmé na tečnou plochu v daném bodě, pak κ_n je její křivost, která se nazývá **normálovou křivostí** v bodě $p \in S$.

Jak už bylo řečeno normálová křivost závisí na směru tečného vektoru křivky procházející bodem, ve kterém ji určujeme. **Hlavními směry křivosti** v bodě p pak označujeme směry, ve kterých normálová křivost nabývá maxima a minima. Směr tečného vektoru v bodě p je dán poměrem hodnot derivací $\dot{u}(t), \dot{v}(t)$ v t, jež odpovídá bodu p. Označme

$$\omega := \dot{u}(t)/\dot{v}(t),\ II := L\omega^2 + 2M\omega + N,\ I = E\omega^2 + 2F\omega + G.$$

Pak podle Mesnieurova vzorce $\kappa_n(\omega) = \frac{II}{I}$ a rovnice pro extrém

$$\kappa_n'(\omega) = \frac{2}{I}[L\omega + M - \frac{II}{I}(E\omega + F)] = 0 \tag{73}$$

je kvadratická. Odpovídající extrémní hodnoty κ_n v hlavních směrech (které mohou být tedy nejvýše dvě k_1, k_2) nazýváme **hlavní normálové křivosti** plochy S v bodě p.

3.6.1 Křivost plochy

Křivost plochy v daném bodě je charakterizována dvěma čísly – Gaussovou a střední křivostí K a H. Obě jsou definovány pomocí hlavních normálových křivostí k_1, k_2 způsobem

$$H := \frac{k_1 + k_2}{2}, \ K := k_1 k_2. \tag{74}$$

Jejich výpočet řešením rovnice (73) a dosazením je poněkud těžkopádný. Je však možno postupovat alternativním způsobem. Z rovnice (73) plyne

$$L\dot{u} + M\dot{v} - \kappa_n(E\dot{u} + F\dot{v}) = 0,, \tag{75}$$

kde $\dot{v}, \dot{u}$ určují extrémní směr a $\kappa_n = k_1$ nebo $\kappa_n = k_2$. Zapíšeme–li κ_n způsobem

$$\kappa_n(\Omega) = \frac{L + 2M\Omega + N\Omega^2}{E + 2F\Omega + G\Omega^2},$$

kde $\Omega := \dot{v}(t)/\dot{u}(t)$, pak rovnici pro extrémní směr, lze zapsat také způsobem

$$M\dot{u} + N\dot{v} - \kappa_n(F\dot{u} + G\dot{v}) = 0,. \tag{76}$$

Rovnice (75) a (76) představují systém homogenních lineárních rovnic pro extrémní směry $(\dot{u}, \dot{v})$. Podmínka jejich řešitelnosti pak představuje kvadratickou rovnici pro κ_n

$$\kappa_n^2(EG - F^2) + \kappa_n(2FM - EN - GL) + LN - M^2 = 0 \tag{77}$$

a její kořeny jsou hlavní normálové křivosti. Hodnotu střední a Gaussovy křivosti plochy je pak možno určit přímo z koeficientů rovnice (77).

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}, \ K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{78}$$

Sestavíme-li koeficienty druhé fundamentální formy opět do symetrické matice

$$h_{11} = L, \ h_{12} = h_{21} = M, \ h_{22} = N, \tag{79}$$

pak střední a Gaussovu křivost je možno zapsat způsobem

$$H = \frac{1}{2}Tr\ (g^{-1}h), \ K = \frac{\det h}{\det g} = \det g^{-1}h. \tag{80}$$

Podle hodnoty lokálních křivostí se body plochy dělí na **eliptické**: $K(p) > 0$, **hyperbolické**: $K(p) < 0$, **parabolické**: $K(p) = 0,\ H(p) \neq 0$ a **planární**: $K(p) = 0,\ H(p) = 0$. Plochy, které mají všude nulovou Gaussovu křivost se nazývají **ploché** (nejsou to jen roviny!!). Plochy, které mají všude nulovou střední křivost se nazývají **minimální**.

Cvičení 3.6.1. *Ukažte, že povrch válce a kužele jsou ploché plochy. Určete normálové křivosti a hlavní směry.*

Cvičení 3.6.2. *Ukažte, že šroubová plocha a catenoid zadaný*

$$\vec{f} = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$$

jsou minimální plochy

Cvičení 3.6.3. *Ověřte, že plocha zadaná*

$$\vec{f}(u,v) = (b \cos u \cos(v/a), b \sin u \cos(v/a), aE(\frac{v}{a}, \frac{b^2}{a^2})\ )$$

kde E je eliptický integrál 2. druhu

$$E(x,m) := \int_0^x \sqrt{1 - m \sin^2 y} dy$$

(pro $b \geq a,\ |v| < a \arcsin \frac{a}{b}$), má konstantní Gaussovu křivost.

Cvičení 3.6.4. *Nechť S je rotační plocha, která vznikne rotací tažné křivky okolo její asymptoty. Spočítejte její Gaussovu křivost.*

Cvičení 3.6.5. *Klasifikujte body toru podle jejich lokálních křivostí.*

3.7 Gauss–Weingartenovy rovnice

Podobně jako křivkám je možno přiřadit v každém jejich bodě význačnou souřadnou soustavu – triádu, je možno něco podobného udělat i pro plochy. V každém bodě regulární plochy jsou vektory $\vec{f}_u, \vec{f}_v, \vec{n}$, kde $\vec{n} = \vec{f}_u \times \vec{f}_v / |\vec{f}_u \times \vec{f}_v|$ lineárně nezávislé. Je tedy možno tuto trojici považovat za bazi třírozměrného prostoru vektorů v bodě

$p = \vec{f}(u,v)$. Upozorněme předem, že tato soustava není ortogonální, neboť obecně $(\vec{f}_u, \vec{f}_v) \neq 0$.

Chceme odvodit vzorce podobné Frenetovým t.j. rovnice určující změnu vektorů baze při posunu do okolních bodů plochy. Přesněji řečeno, zajímají nás derivace těchto vektorů podle souřadnicových čar na ploše $\vec{f}$ vyjádřené v bazi $\vec{f}_u, \vec{f}_v, \vec{n}$.

Začněme s derivacemi $\vec{n}_u, \vec{n}_v$. Vzhledem k tomu, že $\vec{n}$ je jednotkový vektor, musí platit

$$-\vec{n}_u = {h_1}^1 \vec{f}_u + {h_1}^2 \vec{f}_v, \tag{81}$$

$$-\vec{n}_v = {h_2}^1 \vec{f}_u + {h_2}^2 \vec{f}_v. \tag{82}$$

Vynásobením těchto rovnic skalárně $\vec{f}_u$ a $\vec{f}_v$ a relativně jednoduchými úpravami dostaneme rovnice pro koeficienty ${h_j}^k$

$$L = {h_1}^1 E + {h_1}^2 F,$$

$$M = {h_1}^1 F + {h_1}^2 G = {h_2}^1 E + {h_2}^2 F,$$

$$N = {h_2}^1 F + {h_2}^2 G,$$

odkud dostáváme

$${h_j}^k = h_{jm} (g^{-1})_{mk} =: h_{jm} g^{mk}, \tag{83}$$

kde h_{jm} jsou složky druhé fundamentální formy (79). Rovnice (81), (82) lze kompaktně zapsat způsobem

$$\vec{n}_j = -{h_j}^k \vec{f}_k, \tag{84}$$

a nesou označení rovnice Weingartenovy. Derivace $\vec{f}_{uu} \equiv \vec{f}_{11}, \vec{f}_{uv} \equiv \vec{f}_{12}, \ldots$ můžeme podobně zapsat pomocí tzv. Gaussových rovnic

$$\vec{f}_{jk} = {\Gamma_{jk}}^m \vec{f}_m + h_{jk}\ \vec{n}. \tag{85}$$

Fakt, že u vektoru $\vec{n}$ stojí opět složky druhé fundamentální formy, plyne z (72) a ortogonality $\vec{n}$ a tečných vektorů plochy. Koeficienty ${\Gamma_{jk}}^m$ se nazývají *Christoffelovy symboly 2. druhu*. Vynásobením (85) tečnými vektory plochy a použitím vztahů $\vec{f}_{uu} \cdot \vec{f}_u = E = g_{11}, \ldots$ dostaneme soustavu nehomogenních lineárních rovnic pro ${\Gamma_{jk}}^m$, kde pravou stranu lze vyjádřit pomocí derivací složek první fundamentální formy a snadno vidíme, že Christoffelovy symboly 2.druhu lze vyjádřit pomocí Christoffelových symbolů 1. druhu

$$\Gamma_{jk}{}^{m} g_{mn} = \frac{1}{2}(g_{jn,k} + g_{kn,j} - g_{jk,n}) := \Gamma_{jkn} \tag{86}$$

kde

$$g_{jn,k} \equiv \frac{\partial g_{jn}}{\partial u^k}, \ u^1 \equiv u, \ u^2 \equiv v.$$

Odtud

$$\Gamma_{jk}{}^{m} = \frac{1}{2}(g_{jn,k} + g_{kn,j} - g_{jk,n}) g^{nm} \tag{87}$$

Cvičení 3.7.1. *Spočítejte Christoffelovy symboly pro kouli, toroid, rovinu s polárními souřadnicemi.*

Cvičení 3.7.2. *Ukažte, že při změně parametrizace plochy*

$$u^\mu = (u, v) \mapsto u'^\mu = (u', v')$$

se Cristoffelovy symboly transformují způsobem

$$\Gamma'_{j'k'n'}(u', v') = \frac{\partial u^j}{\partial u'^{j'}} \frac{\partial u^k}{\partial u'^{k'}} \frac{\partial u^n}{\partial u'^{n'}} \Gamma_{jkn}(u, v) + \frac{\partial^2 u^p}{\partial u'^{j'} \partial u'^{k'}} \frac{\partial u^q}{\partial u'^{n'}} g_{pq} \tag{88}$$

$$\Gamma'_{j'k'}{}^{m'}(u', v') = \frac{\partial u^j}{\partial u'^{j'}} \frac{\partial u^k}{\partial u'^{k'}} \frac{\partial u'^{m'}}{\partial u^m} \Gamma_{jk}{}^{m}(u, v) + \frac{\partial^2 u^p}{\partial u'^{j'} \partial u'^{k'}} \frac{\partial u'^{m'}}{\partial u^p} \tag{89}$$

Kvůli druhým členům v rovnicích (88) a (89) se Christoffelovy symboly netransformují jako tenzorová pole, ale jako tzv. afinní konexe.

3.8 Kovariantní derivace

Ukázali jsme, že první fundamentální forma se při změně parametrizace plochy

$$u^m = (u, v) \mapsto u'^m = (u', v')$$

transformuje jako kovariantní tenzorové pole 2.řádu, t.j.

$$g_{mn}(u, v) \mapsto g'_{m'n'}(u', v') = \frac{\partial u^m}{\partial u'^{m'}} \frac{\partial u^n}{\partial u'^{n'}} g_{mn}(u, v) \tag{90}$$

Na druhé straně parciální derivace $g_{mn,k} \equiv \frac{\partial g_{mn}}{\partial u^k}$ se jako tenzorové pole (3.řádu) netransformuje a naším cílem je definovat tzv. kovariantní derivaci, t.j. operaci, která z tenzorového pole vytváří opět tenzorové pole, t.j. veličinu, která se transformuje způsobem analogickým k (90).

Je-li zadána plocha $\vec{f}(u,v)$, pak vektory $\vec{f}_u$, $\vec{f}_v$ směřují v každém bodě plochy v jejím tečném směru. To samozřejmě platí i pro vektor, který je jejich lineární kombinací

$$\vec{V}(\vec{f}(u,v)) \equiv \vec{V}(u,v) := V^1(u,v)\vec{f}_u(u,v) + V^2(u,v)\vec{f}_v(u,v) = V^m(u,v)\vec{f}_m(u,v). \tag{91}$$

Jsou-li funkce $V^m(u,v)$ spojité a spojitě derivovatelné[1], je předpisem (91) definováno *vektorové pole* na ploše $\vec{f}(\Omega)$, které je v každém jejím bodě k ní tečné, takže $\forall u,v \; \vec{V}(u,v) \in T_{\vec{f}(u,v)}$.

Nechť $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ je křivka v Ω. Rozdíl tečných vektorů v blízkých bodech $\vec{f}(\alpha(t))$ a $\vec{f}(\alpha(t+dt))$ je

$$\begin{aligned} d\vec{V} &= \vec{V}(\alpha(t+dt)) - \vec{V}(\alpha(t)) \\ &= V^m(\alpha(t+dt))\vec{f}_m(\alpha(t+dt)) - V^m(\alpha(t))\vec{f}_m(\alpha(t)) \\ &= \left[\frac{\partial V^m}{\partial u^k}(\alpha(t))\,\dot{\alpha}^k(t)\,\vec{f}_m(\alpha(t)) + V^m(\alpha(t))\frac{\partial \vec{f}_m}{\partial u^k}(\alpha(t))\dot{\alpha}^k(t)\right] dt. \end{aligned} \tag{92}$$

Výraz v hranatých závorkách lze pak nazvat derivací tečného pole podél křivky $\vec{C}(t) := \vec{f}(\alpha(t))$. Použitím Gaussových rovnic (85) v posledním členu dostaneme

$$\frac{dV}{dt}(t) = \dot{\alpha}^k(t)\left[\left(\frac{\partial V^l}{\partial u^k} + V^m \Gamma_{mk}{}^l\right)\vec{f}_l + V^m h_{mk}\,\vec{n}\right]_{(u,v)=\alpha(t)} \tag{93}$$

odkud je zřejmé, že poslední člen na pravé straně této rovnice není tečným k ploše $\vec{f}(u,v)$. My však chceme zavést operaci $\frac{\nabla\vec{V}}{dt}$, která má některé vlastnosti derivace a "ifinitesimálně posunuje"tečné vektory jen v tečném směru. Tato operace se nazývá *kovariantní derivace (tečného) vektorového pole* $\vec{V}$ *podle křivky* $\vec{C}(t) = \vec{f}(\alpha(t))$ a lze ji definovat jako projekci derivace (93) na tečný prostor $T_{\vec{f}(u,v)}$.

$$\frac{\nabla\vec{V}}{dt} := \frac{d\vec{V}}{dt} - \left(\frac{dV}{dt}\cdot\vec{n}\right)\vec{n} \tag{94}$$

[1] Rigorozně vzato, obvykle se předpokládají funkce V^m hladké, t.j. nekonečně derivovatelné

Kovariantní derivace (tečného) vektorového pole $\vec{V}$ podle souřadnicových čar $\vec{u}(t) = \vec{f}((t, v_0))$ a $\vec{v}(t) = \vec{f}((u_0, t))$ značíme $\nabla_1 \vec{V}$, resp. $\nabla_2 \vec{V}$. Platí pak

$$\nabla_k \vec{V} = V^l{}_{;k} \vec{f}_l, \quad V^l{}_{;k} := \frac{\partial V^l}{\partial u^k} + V^m \Gamma_{mk}{}^l, \quad \frac{\nabla \vec{V}}{dt}(t) = \dot{\alpha}^k(t) \left[V^l{}_{;k} \vec{f}_l \right]_{(u,v)=\alpha(t)}. \tag{95}$$

Kovariantní derivace vytváří z tenzorových polí na Ω tenzorová pole o řád vyšší, např. z (tečného) vektorového pole tenzorové pole 2. řádu.

Cvičení 3.8.1. *Ukažte že složky kovariantni derivace tečného vektorového pole se transformují jako složky (smíšeného) tenzorové pole, t.j.*

$$V'^{l'}{}_{;k'}(u', v') = \frac{\partial u'^{l'}}{\partial u^l} \frac{\partial u^k}{\partial u'^{k'}} V^l{}_{;k}(u, v). \tag{96}$$

Na druhé straně, kovariantni derivace kovariantního pole (1-formy na Ω) $\omega = \omega_l(u, v)\, du^l$ je definována způsobem

$$\nabla_k \, \omega = \omega_{l;\,k}(u, v)\, du^l, \quad \omega_{l;\,k} := \frac{\partial \omega_l}{\partial u^k} - \Gamma_{lk}{}^m \omega_m. \tag{97}$$

Kovariantní derivace skalární funkce $\phi(u, v) := \Phi(\vec{f}(u, v))$ je obyčejná derivace $\nabla_k \phi = \partial_k \phi$ a kovariantni derivace kovariantního tenzorového pole 2. řádu $Q = Q_{ij}\, du^i du^j$ je definována způsobem

$$\nabla_k \, Q = Q_{ij;\,k}\, du^i du^j, \quad Q_{ij;\,k} := \frac{\partial Q_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}{}^m Q_{mj} - \Gamma_{kj}{}^m Q_{im} \tag{98}$$

Z výrazu (93) je zřejmé, že kovariantní derivace vektoru v bodě $\vec{f}(u_0, v_0)$ je stejná pro všechny křivky $\vec{C}(t_0) = \vec{f}(\alpha(t_0))$, $\tilde{\vec{C}}(t_0) = \vec{f}(\tilde{\alpha}(t_0))$, které procházejí bodem $(u_0, v_0) = \tilde{\alpha}(t_0) = \alpha(t_0) \in \Omega$ a mají v něm stejnou rychlost $\dot{\tilde{\alpha}}(t_0) = \dot{\alpha}(t_0)$. Kovariantní derivace vektoru v bodě $\vec{f}(u, v)$ tedy nezávisí na křivce $C(t)$ pokud $\alpha(t)$ má uvedené vlastnosti. Je tedy určena tečným vektorem

$$\vec{X}(u, v) = X^k(u, v) \vec{f}_k(u, v) = \dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}_k(\alpha(t)) \dot{\alpha}^k(t) = \dot{C}^k(u, v) \vec{f}_k(u, v)) \tag{99}$$

takže

$$X^k(u, v) = \dot{C}^k(u, v) := \dot{\alpha}^k(t) \tag{100}$$

a kovariantní derivaci ve směru tečného vektorového pole $\vec{X}(u, v)$ definujeme způsobem

$$\nabla_X := X^k(u, v) \nabla_k.$$

Vlastnosti kovariantní derivace:

- $\nabla_{\phi X+Y} Z = \phi \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- $\nabla_X (Z_1 + Z_2) = \nabla_X Z_1 + \nabla_X Z_2$
- $\nabla_X (\phi\, Z) = \phi\, \nabla_X Z + Z\, \nabla_X \phi$
- $\nabla_X (Z_1 \cdot Z_2) = \nabla_X Z_1 \cdot Z_2 + Z_1 \cdot \nabla_X Z_2$

kde ϕ je libovolné skalární a Z je libovolné skalární, vektorové či tenzorové pole na $\vec{f}(\Omega)$.

Cvičení 3.8.2. *Ukažte že složky kovariantni derivace metrického tenzorového pole mají nulovou kovariantní derivaci a*

$$W_{m;k} = W^r{}_{;k} g_{rm},$$

kde $W_m := W^r g_{rm}$

Rovnici geodetiky v přirozené parametrizaci $(U(s), V(s)) = (U^1(s), U^2(s))$ lze zapsat pomocí kovariantní derivace způsobem

$$\nabla_{\dot{C}}\, \dot{C} = 0. \tag{101}$$

Pokud totiž v (99) zvolíme $\alpha(s) = (U(s), V(s))$, pak díky(100) $\dot{C}^k(U(s), V(s)) = \dot{U}^k(s)$, takže

$$\nabla_{\dot{C}}\, \dot{C} = \dot{C}^k \left(\frac{\partial \dot{C}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{km}{}^l \dot{C}^m\right) = \dot{U}^k \left(\frac{\partial \dot{C}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{km}{}^l \dot{U}^m\right). \tag{102}$$

Mimo to

$$\dot{U}^k \frac{\partial \dot{C}^l}{\partial u^k} = \frac{d}{ds} \dot{C}^l(U(s), V(s)) = \frac{d\, \dot{U}^l(s)}{ds} = \ddot{U}^l(s).$$

Z (102) a (101) pak plyne

$$\ddot{U}^l + \Gamma_{km}{}^l \dot{U}^k \dot{U}^m = 0,$$

což je rovnice geodetiky v přirozené parametrizaci.

3.9 Paralelní přenos

Pomocí kovariantní derivace můžeme zavést tzv. *paralelní přenos tečného vektoru* $\vec{V}(u,v)$ podél křivky $\vec{C}(t)$: Infinitesimální změna vektoru $\vec{V}(u,v)$ v tečném směru při paralelním přenosu vektoru v $\mathbf{R}^3$ podle křivky $\vec{C}(t)$ podle (92) je

$$d_{||}\vec{V}(t) = \dot{\alpha}^k(t)\vec{f}_l \left(\frac{\partial V^l}{\partial u^k} + V^m {\Gamma_{mk}}^l \right)_{(u,v)=\alpha(t)} dt. \tag{103}$$

Odtud plyne že $\vec{V} + d_{||}\vec{V} \in T_{\vec{f}(u,v)}$ a kovariantní derivace je

$$\frac{\nabla \vec{V}(t)}{dt} = \frac{d_{||}\vec{V}(t)}{dt}.$$

Pro paralelní přenos tečného vektoru $\vec{V}$ podél křivky $\vec{C}(t)$ pak platí

$$\nabla_{\dot{C}} V = 0. \tag{104}$$

Tak jako pro paralelně přenesené vektory v $\mathbf{R}^3$ v libovolném směru $\vec{X}.t$ platí $\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 0$, *paralelním tečným vektorovým polem* V na $\vec{f}(\Omega)$ nazveme pole (91), které splňuje

$$\nabla_X V = 0, \quad \forall X = X^k(u,v)\vec{f}_k(u,v). \tag{105}$$

3.10 Fundamentální věty o plochách

Jsou-li Christoffelovy symboly vyjádřeny pomocí metrického tenzoru a složky první a druhé fundamentální formy vyjádřeny vzorci (52) a (72), pak Weingartenovy a Gaussovy rovnice jsou identity. Jsou-li však složky první a druhé fundamentální formy zadány jako nezávislé funkce, pak se jedná o složitou soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro vektorovou funkci $\vec{f}$, jež určuje tvar plochy zadané první a druhou fundamentální formou. Otázkou je za jakých podmínek je možno takovou plochu nalézt a zda je určena jednoznačně. Na tuto otázku dávají odpověď následující Bonnetovy věty (1865)

Věta 3.10.1. *Nechť U je otevřenou podmnožinou $\mathbf{R}^2$ a E, F, G, L, M, N jsou funkce se spojitými druhými derivacemi zobrazující U do $\mathbf{R}$ splňující podmínky*

$$E > 0,\ G > 0,\ EG - F^2 > 0 \tag{106}$$

$$\partial_2 L - \partial_1 M = L\,\Gamma_{12}{}^1 + M\,(\Gamma_{12}{}^2 - \Gamma_{11}{}^1) - N\,\Gamma_{11}{}^2, \tag{107}$$

$$\partial_2 M - \partial_1 N = L\,\Gamma_{22}{}^1 + M\,(\Gamma_{22}{}^2 - \Gamma_{12}{}^1) - N\,\Gamma_{12}{}^2, \tag{108}$$

$$-F\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \partial_2\Gamma_{11}{}^1 - \partial_1\Gamma_{12}{}^1 - \Gamma_{12}{}^2\Gamma_{12}{}^1 + \Gamma_{11}{}^2\Gamma_{22}{}^1, \tag{109}$$

kde $\Gamma_{jk}{}^m$ *jsou dány vzorcem (87).*

Pak pro každé $(u_0, v_0) \in U$ *existuje otevřená množina* $U' \subset U$, $(u_0, v_0) \in U'$ *a regulární elementární plocha* $\vec{f} : U' \to \mathbf{R}^3$*, tak že E,F,G,L,M,N jsou odpovídající složky první a druhé fundamentální formy odpovídající* $\vec{f}$*.*

Věta 3.10.2. *Nechť* $\vec{f}, \vec{f'}$ *jsou elementární regulární plochy definované na stejné otevřené množině a mající na ní stejné odpovídající fundamentální formy. Pak existuje Eukleidovské zobrazení* $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *tak, že* $\vec{f'} = \Phi \circ \vec{f}$*.*

Podmínky (106) jsou přirozeným důsledkem vyjádření (52) první fundamentální formy. Podmínkám (107), (108) se říká **Peterson–Mainardi–Codazziho rovnice** a je poučné ukázat jejich původ. Jedná se o podmínky kompatibility Gauss–Weingartenových rovnic. Požadujeme-li, totiž aby třetí derivace $\vec{f}$ a druhé derivace $\vec{n}$ byly záměnné, pak z rovnic (85) a (84) dostaneme rovnice

$$\partial_m\Gamma_{ij}{}^k - \partial_j\Gamma_{im}{}^k + \Gamma_{ij}{}^l\Gamma_{lm}{}^k - \Gamma_{im}{}^l\Gamma_{lj}{}^k = h_{ij}h_m{}^k - h_{im}h_j{}^k, \tag{110}$$

$$\partial_m h_{ij} - \partial_j h_{im} + \Gamma_{ij}{}^k h_{km} - \Gamma_{im}{}^k h_{kj} = 0 \tag{111}$$

$$\partial_j h_i{}^k - \partial_i h_j{}^k + h_i{}^l\Gamma_{lj}{}^k - h_j{}^l\Gamma_{li}{}^k = 0 \tag{112}$$

Poslední dvě sady rovnic jsou vzájemně ekvivalentní a představují kompaktní tvar Peterson–Mainardi–Codazziho rovnic (107), (108). Rovnice (110), kterým se rovněž říká Gaussovy rovnice, jsou v dimenzi 2 vzájemně ekvivalentní a představují podmínku (109).

3.11 Vnitřní geometrie plochy, Gaussova věta

Vnitřní geometrií plochy nazýváme veškeré její vlastnosti, které jsou určeny jejím metrickým tenzorem tzn. zadáním vzdáleností mezi jejími body. Ukážeme, že takto je určena i Gaussova křivost, i když ze vzorce (78) to není zřejmé. Levá strana rovnice

(110) vytvořená z Christoffelových symbolů, tedy de facto z metrického tenzoru, představuje tzv. Riemannův tenzor křivosti

$$R^k{}_{ijm} := \partial_m \Gamma_{ij}{}^k - \partial_j \Gamma_{im}{}^k + \Gamma_{ij}{}^l \Gamma_{lm}{}^k - \Gamma_{im}{}^l \Gamma_{lj}{}^k, \tag{113}$$

který je velmi důležitou charakteristikou nejen plochy, ale především neeukleidovských variet vyšší dimenze. Důležité a překvapivé je, že ač Christoffelovy symboly nejsou tenzory, jejich kombinace (113) je (smíšený) tenzor 4. řádu, to znamená že při změně parametrizace plochy

$$u^\mu = (u, v) \mapsto u'^\mu = (u', v')$$

se transformuje způsobem

$$R'^{m'}{}_{j'k'n'}(u', v') = \frac{\partial u'^{m'}}{\partial u^m} \frac{\partial u^j}{\partial u'^{j'}} \frac{\partial u^k}{\partial u'^{k'}} \frac{\partial u^n}{\partial u'^{n'}} R^m{}_{jkn}(u, v) \tag{114}$$

Jsou-li například všechny složky Riemannova tenzoru nulové pak existují souřadnice (u', v') ve kterých má metrický tenzor Eukleidovský tvar, v případě plochy

$$g'(u', v') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nulovost Riemannova tenzoru je tedy vhodným kriteriem plochosti plochy, neboť nezávisí na výběru souřadnic.

Mimo to je z Riemannova tenzoru možno vhodnými úpravami odvodit Gaussovu křivost plochy. Z rovnice (110) plyne

$$R_{lijm} := g_{lk} R^k{}_{ijm} = h_{ij} h_{ml} - h_{im} h_{jl} = \epsilon_{il} \epsilon_{jm} \det h = \tag{115}$$

$$= \epsilon_{il} \epsilon_{jm} K \det g = K(g_{ij} g_{ml} - g_{im} g_{jl}), \tag{116}$$

kde

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno dostaneme

$$g^{lj} g^{im} R_{lijm} = K\,(\delta^l_i \delta^i_l - \delta^i_i \delta^l_l) = -2K. \tag{117}$$

Je tedy vidět, že Gaussovu křivost (na rozdíl od střední křivosti) je možno určit pouze ze znalosti metrického tenzoru plochy. Jinými slovy, plochy se stejnou první fundamentální formou mají též stejnou Gaussovu křivost, což vyjadřuje

Věta 3.11.1. *(Gaussova Theorema egregium) Nechť zobrazení* $\Phi : (u', v') \mapsto (u, v)$ *z* $\Omega' \subset \mathbf{R}^2$ *do* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *je lokální isometrií fundamentálních forem* g, g' *na* Ω *a* Ω', *t.j., platí*

$$g'_{j'k'}(u', v') = \frac{\partial \Phi^j}{\partial u'^{j'}} \frac{\partial \Phi^k}{\partial u'^{k'}} \, g_{jk}(\Phi(u', v')). \tag{118}$$

Pak

$$K'(u', v') = K(u, v) = K(\Phi(u', v')). \tag{119}$$

Všimněte, si že tato věta nijak neodkazuje na vnoření ploch $\vec{f}$ do $\mathbf{R}^3$, nýbrž pouze na jejich první fundamentální formy.

Dvojice (Ω, g) představují jednoduchý příklad tzv. Riemannových variet, to jest variet se zadaným metrickým tenzorem, který určuje geometrické vlastnosti, jež nejsou závislé na jejich vnoření do prostorů s vyšší dimenzí. Jak vidno, Gaussova křivost (na rozdíl od hlavní) k těmto vlastnostem patří.