Klasifikace veličin vzhledem k transformacím souřadnic (změnám báze $\overleftrightarrow{E}$) $\quad \dim \overleftrightarrow{E} = n \in \mathbb{N}$

veličiny jsou prvky $\overleftrightarrow{E}$ resp. nějaké struktury (tzv. tenzorové algebry) vybudované na $\overleftrightarrow{E}$, které budeme charakterizovat podle toho kolik mají složek a jak se tyto složky mění při změnách báze $\overleftrightarrow{E}$

$$B = (\overleftrightarrow{e}_1, \dots, \overleftrightarrow{e}_n) \longrightarrow \tilde{B} = (\tilde{\overleftrightarrow{e}}_1, \dots, \tilde{\overleftrightarrow{e}}_n) \quad \text{kde} \quad \boxed{\tilde{\overleftrightarrow{e}}_j = \overleftrightarrow{e}_i S^i{}_j} \qquad \mathbb{S} = (S^i{}_j) \in GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}$$

skaláry $s \in \mathbb{R}$ $\quad \tilde{s} = s$ $\quad$ veličiny charakterizované pouze velikostí (a jednotkou), teplota náboj, energie

vektory $\vec{v} \in \overleftrightarrow{E}$ $(\vec{v} \in \mathbb{R}^n)$ veličiny charakterizované velikostí a směrem, síla, rychlost, hybnost, intenzita ele. pole,

$$\vec{v} = v^i \overleftrightarrow{e}_i = \tilde{v}^j \tilde{\overleftrightarrow{e}}_j = \tilde{v}^j \overleftrightarrow{e}_i S^i{}_j \quad \Rightarrow \quad v^i = S^i{}_j \tilde{v}^j \quad / \ (S^{-1})^k{}_i$$

$$(S^{-1})^k{}_i v^i = (S^{-1}S)^k{}_j \tilde{v}^j = \delta^k{}_j \tilde{v}^j = \tilde{v}^k$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{v}^k &= (S^{-1})^k{}_i v^i \\ \tilde{\vec{v}} &= \mathbb{S}^{-1} \vec{v} \end{aligned}}$$

<u>kontravariantní</u> (mění se proti – opačně než báze)

$B=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n) \longrightarrow \tilde{B}=(\tilde{\vec{e}}_1,\dots,\tilde{\vec{e}}_n)$ kde $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i\, S^i_{\ j}$ $\quad \mathbb{S}=(S^i_{\ j}) \in GL(n,\mathbb{R})$ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

$\vec{E}^*$ duální vektorový prostor k vek. pr. $\vec{E}$ je mn. všech lineárních zobrazení z $\vec{E}$ do $\mathbb{R}$ (lin. funkcionálů)

duální bázi $B^*=(\underleftarrow{e}^1,\dots,\underleftarrow{e}^n)$ k bázi $B=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ $\quad \underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j)=\delta^i_j$ tvoří souřadnicové funkcionály

lineární funkcionál $\underleftarrow{\omega} \in \vec{E}^*$ $\qquad \underleftarrow{\omega} = \omega_i\, \underleftarrow{e}^i \qquad \underleftarrow{\omega}(\vec{e}_j) = \omega_i\, \underleftarrow{e}^i(\vec{e}_j) = \omega_i\, \delta^i_j = \omega_j$ souřadnice v bázi B^*

$$\tilde{\omega}_j = \underleftarrow{\omega}(\tilde{\vec{e}}_j) = \underleftarrow{\omega}(\vec{e}_i\, S^i_{\ j}) = \underleftarrow{\omega}(\vec{e}_i)\, S^i_{\ j} = \omega_i\, S^i_{\ j}$$

kovektor $\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\omega}_j = \omega_i\, S^i_{\ j} \\ \vec{\tilde{\omega}}^T = \vec{\omega}^T\, \mathbb{S} \end{array}}$ <u>kovariantní</u> (mění se stejně jako báze)

$B = (\overleftarrow{e}_1, \dots, \overleftarrow{e}_n) \longrightarrow \tilde{B} = (\tilde{\overleftarrow{e}}_1, \dots, \tilde{\overleftarrow{e}}_n)$ kde $\tilde{\overleftarrow{e}}_j = \overleftarrow{e}_i S^i{}_j$ $\quad \mathbb{S} = (S^i{}_j) \in GL(n, \mathbb{R})$ matice přechodu od B k $\tilde{B}$

---

tenzory

tenzor 2. řádu (kovariantní) $\underset{\leftarrow}{\alpha}, \underset{\leftarrow}{\beta} \in \overleftarrow{E}^*$ v lib. bázi def. $T_{ij} := \alpha_i \beta_j$ $\qquad \tilde{T}_{ij} = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j = \alpha_k S^k{}_i \, \beta_l S^l{}_j = \alpha_k \beta_l S^k{}_i S^l{}_j = T_{kl} S^k{}_i S^l{}_j$

maticově $S^k{}_i T_{kl} S^l{}_j = S^k{}_i (\mathbb{T}\mathbb{S})_{kj} = ((\mathbb{T}\mathbb{S})^T)_{jk} S^k{}_i = ((\mathbb{T}\mathbb{S})^T \mathbb{S})_{ji} = (\mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S})_{ij}$ $\qquad \tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{S}^T \mathbb{T} \mathbb{S}$

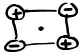
tenzot 2. řádu (kontravariantní) $\overleftarrow{u}, \overleftarrow{v} \in \overleftarrow{E}$ $\quad T^{ij} := u^i v^j$ $\qquad \tilde{T}^{ij} = (S^{-1})^i{}_k (S^{-1})^j{}_l T^{kl}$ $\qquad \tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{T} (\mathbb{S}^{-1})^T$

Tenzorem typu $\binom{p}{q}$ tj. kontravariantním řádu $p \in \mathbb{N}_0$ a kovariantním řádu $q \in \mathbb{N}_0$ nazýváme veličinu T reprezentovanou (v bázi B) n^{p+q} reálnými čísly $T^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$ které se při změně báze $\tilde{\overleftarrow{e}}_j = \overleftarrow{e}_i S^i{}_j$ transformují podle vztahu

$$\boxed{\tilde{T}^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q} = (S^{-1})^{i_1}{}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}{}_{k_p} \, T^{k_1, \dots, k_p}_{l_1, \dots, l_q} \, S^{l_1}{}_{j_1} \dots S^{l_q}{}_{j_q}}$$

$p+q$ řád tenzoru

Př. tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \int_{V'} \rho (x'^2_l \delta_{jk} - x'_j x'_k)\, dV'$ $\quad L_j = I_{jk}\omega_k \quad T = \frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k$

elektrický kvadrupólový moment $Q_{jk} = \int_V (3x'_j x'_k - \delta_{jk} x'^2_l)\, \rho\, dV$ 

tenzor mechanického napětí, tenzor elektromagnetického pole $F^{\mu\nu}$, tenzor energie a hybnosti

Pozn. skalár = tenzor nultého řádu $\qquad$ vektor = tenzor prvního řádu

tenzorová hustota typu $\binom{p}{q}$ váhy $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\qquad \tilde{\mathcal{T}}^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = (\det S)^{\lambda} (S^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (S^{-1})^{i_p}_{k_p}\, \mathcal{T}^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}\, S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_q}_{j_q}$

Buď $G \subset GL(n)$ podgrupa, pak tenzor T nazýváme G-invariantní, pokud se jeho složky nemění při změně báze $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_j \quad \forall S \in G$

Př. $GL(n)$-invariantní tenzory: skaláry, tenzor typu $\binom{1}{1}$ $T^i_j := \delta^i_j$

Pozn. Grupa transformací vůči kterým se charakterizují veličiny závisí na teorii
mechanika – ortogonální transformace $O(3)$
STR – Lorentzovy transformace $O(1,3)$ $\qquad$ OTR – obecné lineární transformace $GL(4)$

<u>Skalární pole</u> je zobrazení $U: E \to \mathbb{R}$, $U = U(\mathscr{b})$ v souřadnicích $U: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $U = U(\vec{x}(\mathscr{b}))$

$$\tilde{U}(\tilde{\vec{x}}(\mathscr{b})) = U(\vec{x}(\mathscr{b})) \qquad \tilde{U}(\tilde{\vec{x}}) = U(\vec{x}) = U(\mathbb{S}(\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{x}}(\sigma)))$$

<u>Vektorové pole</u> (kontravariantní) je zobrazení $\vec{F}: E \to \vec{E}$, $\vec{F} = \vec{F}(\mathscr{b})$ v souřadnicích $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}(\mathscr{b}))$

$$\tilde{F}^i(\tilde{\vec{x}}(\mathscr{b})) = (S^{-1})^i_{\ j}\, F^j(\vec{x}(\mathscr{b})) \qquad \tilde{\vec{F}}(\tilde{\vec{x}}) = \mathbb{S}^{-1}\vec{F}(\vec{x}) = \mathbb{S}^{-1}\vec{F}(\mathbb{S}(\tilde{\vec{x}} - \tilde{\vec{x}}(\sigma)))$$

<u>Euklidovský afinní prostor</u> – affiní prostor se skalárním součinem na $\vec{E}$ tj. s bilineárním zobrazením $g: \vec{E} \times \vec{E} \to \mathbb{R}$ které je symetrické $g(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{v},\vec{u})$ $\forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{E}$ a pozitivně definitní $g(\vec{v},\vec{v}) > 0$ $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$

Skalární součin v bázi B $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = g(\vec{u},\vec{v}) = g(u^i\vec{e}_i, v^j\vec{e}_j) = u^i v^j g(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = u^i g_{ij} v^j = \vec{u}^T \mathbb{g}\, \vec{v} = (u^1,\dots,u^m)\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m\end{pmatrix}$

Gramova matice $\mathbb{g} = (g_{ij})$ tenzor typu $\binom{0}{2}$ tzv. metrický tenzor, v ON bázi $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathbb{g} = \mathbb{1}$

Soustava souřadnic $\langle \sigma, (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m)\rangle$ se nazývá <u>kartézská</u>, je-li báze $B = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m)$ ortonormální.

Ortogonální transformace (přechody mezi ortonormálními bázemi) $\tilde{\vec{e}}_j = \vec{e}_i S^i_{\ j}$

pasivně – ponechávají invariantní metrický tenzor (nemění vzorec pro výpočet skalárního součinu)

$$\delta_{ij} = \tilde{g}_{ij} = g_{kl} S^k_{\ i} S^l_{\ j} = \delta_{kl} S^k_{\ i} S^l_{\ j} = S^k_{\ i} S^k_{\ j}$$

aktivně – zachovávají délky a úhly (nemění výsledek skalárního součinu) $g(\mathbb{S}\vec{u}, \mathbb{S}\vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$

$$(\mathbb{S}\vec{u})^T \mathbb{g} (\mathbb{S}\vec{v}) = \vec{u}^T \mathbb{S}^T \mathbb{g} \mathbb{S} \vec{v} = \vec{u}^T \mathbb{g} \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \qquad \mathbb{S}^T \mathbb{g} \mathbb{S} = \mathbb{g} \quad \text{v ON. bázi} \quad \mathbb{g} = \mathbb{1} \quad \mathbb{S}^T \mathbb{S} = \mathbb{1} \quad \mathbb{S}^{-1} = \mathbb{S}^T$$

ortgonální transformacetransformace $\mathbb{S} \in \mathcal{O}(n) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \mathbb{A}^T\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{1}\}$ ortogonální grupa

kovariantní $\quad \tilde{\omega}_j = \omega_i S^i_{\ j} \qquad \tilde{\vec{\omega}}^T = \vec{\omega}\,\mathbb{S} \qquad \tilde{\vec{\omega}} = \mathbb{S}^T \vec{\omega}$

kontravariantní $\quad \tilde{v}^i = (S^{-1})^i_{\ j} v^j \qquad \tilde{\vec{v}} = \mathbb{S}^{-1} \vec{v} \qquad \tilde{\vec{v}} = \mathbb{S}^T \vec{v}$

jsou při OG. transformacích v mechanice stejné proto odteď indexy budou jen dole

Orientace vektorového prostoru je zobrazení $\omega : \{ B \mid B \text{ báze } \vec{E} \} \to \{+1,-1\}$ takové, že $\forall B, \tilde{B}$ báze $\vec{E}$

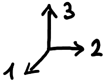
platí $\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = \omega(\tilde{B})$ souhlasně orientované báze

$\det S > 0 \Rightarrow \omega(B) = -\omega(\tilde{B})$ opačně orientované báze

Báze B je kladně orientovaná pokud $\omega(B) = +1$

Př. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \neq 0)$ je kladně orientovaná báze

Pozn. Fyzikální prostor není orientovaný, orientaci v něm volíme výběrem pravidla pravé (levé) ruky.



Pravotočivá

Levotočivá

V mechanice je orientace fixována volbou báze tak, že ta je vždy kladně orientovaná.

Pseudotenzory – veličiny jejichž definice závisí na orientaci tak, že při změně orientace mění znaménko.

Např. magnetická indukce $\vec{B}_{-\omega} = -\vec{B}_{\omega}$ nebo moment hybnosti, moment síly, úhlová rychlost, ...

Vztažná soustava = vztažné těleso (tuhé) + hodiny + kartézská soustava souřadnic (spojená s v. tělesem)

— reprezentujeme ji soustavou kartézských souřadnic $\langle \sigma(t), \underbrace{(\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t))}_{B(t) \text{ pravotočivá ON. báze}} \rangle$

počátek σ lze volit kdekoliv (homogenita pr.), $\sigma = \sigma(t)$ translace

osy (bázi) lze natočit jakkoliv (izotropie pr.), $B = B(t)$ rotace

vůči Newtonově absolutnímu pr.

Transformace souřadnic mezi pravotočivými kartézskými vztažnými soustavami

$$\vec{\tilde{x}} = \mathbb{S}^T(t)\,(\vec{x} - \vec{x}(\tilde{\sigma}(t))) \qquad \tilde{x}_i = S_{ji}(t)(x_j - x_j(\tilde{\sigma}(t))) \qquad \mathbb{S}(t) \in SO(3)$$

Pozn. Rychlost vůči Newtonově absolutnímu pr. $\vec{v}(b) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t}$ neumíme měřit, proto zavedeme

Relativní veličiny — definované vůči vztažné soustavě — mohou se transformovat složitěji

Polohový vektor $\vec{x}(b)$ $\qquad x_i(b) = (b - \sigma)\cdot \vec{e}_i$

Vektor rychlosti $\vec{v}(b) = \dot{\vec{x}}(b) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{x}(b(t+\Delta t)) - \vec{x}(b(t))}{\Delta t}$ $\qquad v_i = \dot{x}_i$

Vektor zrychlení $\vec{a}(b) = \dot{\vec{v}}(b) = \ddot{\vec{x}}(b)$