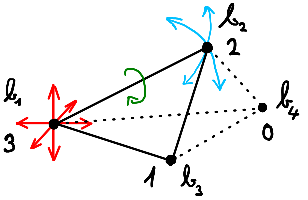
Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso
- model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
- aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
- má $s = 6$ stupňů volnosti(3 translační + 3 rotační)

Mechanika tuhého tělesa

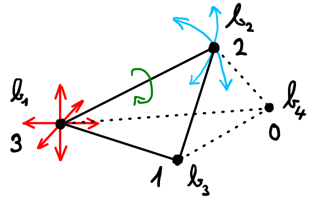


Tuhé těleso
- model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
- aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
- má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

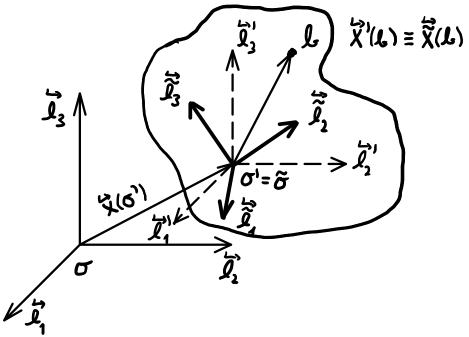
vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$

Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso — model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
— aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
— má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

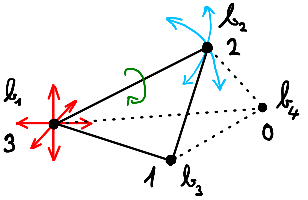


vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$

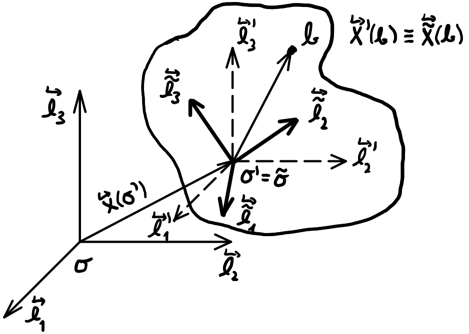


Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso — model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
— aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
— má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

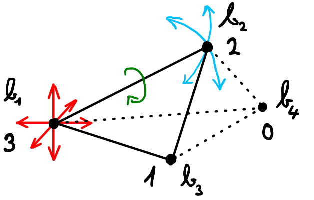


vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$



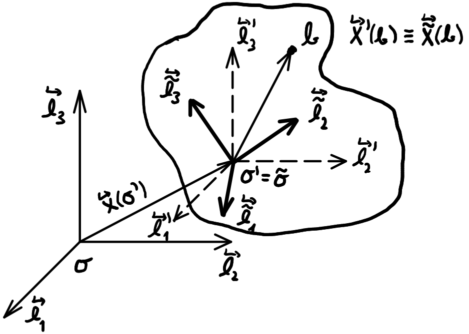
$\langle \sigma, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ inerciální vztažná soustava (laboratorní)

Mechanika tuhého tělesa



Tuhé těleso – model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
– aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
– má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$

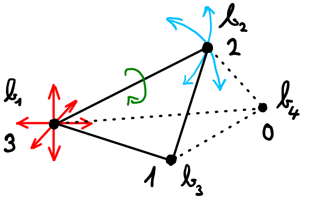


$\langle \sigma, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ inerciální vztažná soustava (laboratorní)

$\downarrow \qquad \sigma'(t) = \sigma + \vec{R} \qquad \vec{e}_i' = \vec{e}_i \qquad \vec{X}'(b) = \vec{X}(b) - \vec{X}(\sigma')$

$\langle \sigma', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') \rangle$ soustava hmotného středu (těžišťová)

Mechanika tuhého tělesa

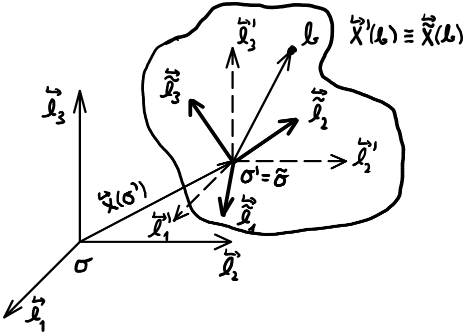


Tuhé těleso — model reálného tělesa, nepodléhá deformacím

— aproximujeme soustavou hm. bodů o neměnných vzdálenostech

— má $s=6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$



$\langle \sigma,\ B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\rangle$ inerciální vztažná soustava (laboratorní)

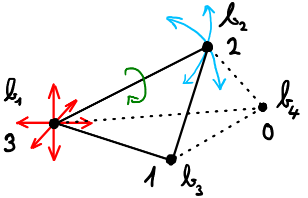
$\downarrow$ $\quad \sigma'(t)=\sigma+\vec{R} \quad \vec{e}_i{}'=\vec{e}_i \quad \vec{X}'(b)=\vec{X}(b)-\vec{X}(\sigma')$

$\langle \sigma',\ B'=(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')\rangle$ soustava hmotného středu (těžišťová)

$\downarrow$ $\quad \tilde{\sigma}(t)=\sigma'(t) \quad \tilde{\vec{e}}_i(t)=\vec{e}_j{}' S_{ji}(t) \quad S\in SO(3) \quad \tilde{\vec{X}}(b)=S^T\vec{X}'(b)$

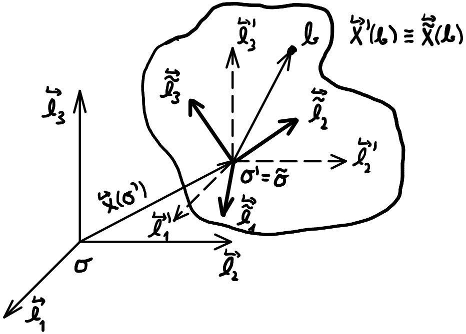
$\langle \tilde{\sigma},\ \tilde{B}=(\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,\tilde{\vec{e}}_3)\rangle$ soustava spojená s tělesem (tělesová)

Mechanika tuhého tělesa



Tuhé těleso – model reálného tělesa, nepodléhá deformacím
– aproximujeme soustavou hm. bodů o neměných vzdálenostech
– má $s = 6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

vazby $|b_\alpha - b_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = \text{konst.}$



$\langle \sigma, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rangle$ inerciální vztažná soustava (laboratorní)

$\downarrow$ $\sigma'(t) = \sigma + \vec{R}$ $\quad \vec{e}_i' = \vec{e}_i$ $\quad \vec{X}'(b) = \vec{X}(b) - \vec{X}(\sigma')$

$\langle \sigma', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') \rangle$ soustava hmotného středu (těžišťová)

$\downarrow$ $\tilde{\sigma}(t) = \sigma'(t)$ $\quad \tilde{\vec{e}}_i(t) = \vec{e}_j S_{ji}(t)$ $\quad S \in SO(3)$ $\quad \tilde{\vec{X}}(b) = S^T \vec{X}'(b)$

$\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} = (\tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \tilde{\vec{e}}_3) \rangle$ soustava spojená s tělesem (tělesová)

$$\tilde{\vec{X}}_\alpha = \tilde{\vec{X}}(b_\alpha) = S^T(\vec{X}_\alpha - \vec{X}(\tilde{\sigma}))$$

$$\vec{X}_\alpha = S\tilde{\vec{X}}_\alpha + \vec{X}(\tilde{\sigma})$$

$$\dot{\vec{X}}_\alpha = \dot{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha + S\underbrace{\dot{\tilde{\vec{X}}}_\alpha}_{=0} + \dot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) = \dot{S}S^T\vec{X}_\alpha' + \dot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) = \underbrace{\underbrace{\dot{S}S^T}_{-\omega}(\vec{X}_\alpha - \vec{X}(\sigma'))}_{\dot{\vec{X}}_\alpha' \text{ rychlost vůči } \langle\sigma', B'\rangle} + \dot{\vec{X}}(\sigma')$$

body tělesa jsou v soustavě $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$ v klidu

Tenzor $\omega = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$ je antisymetrický

$$\mathbb{S}\mathbb{S}^T = \mathbb{1} \quad / \frac{d}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$$

$$\omega^T = (-\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)^T = -\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T = -\omega$$

Tenzor $\omega = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$ $\qquad \mathbb{S}\mathbb{S}^T = \mathbb{1} \;\; / \frac{d}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$

je antisymetrický

$$\omega^T = (-\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)^T = -\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T = -\omega$$

$\Downarrow$

Chceme

$$-\omega \vec{X}'_\alpha = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T \vec{X}'_\alpha = \vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha \qquad \omega \equiv \omega'$$

$$-\omega_{ik} X'_{\alpha k} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j X'_{\alpha k} \qquad \forall \vec{X}'_\alpha$$

$$-\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j \qquad / \varepsilon_{ilk}$$

$$\varepsilon_{lik} \omega_{ik} = -\varepsilon_{ilk} \omega_{ik} = \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{ijk} \Omega_j = 2\delta_{lj} \Omega_j = 2\Omega_l$$

Tenzor $\omega = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$ $\qquad \mathbb{S}\mathbb{S}^T = \mathbb{1} \; / \frac{d}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$

je antisymetrický

$$\omega^T = (-\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)^T = -\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T = -\omega$$

$\Downarrow$

Chceme

$$-\omega \vec{x}'_\alpha = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T \vec{x}'_\alpha = \vec{\Omega} \times \vec{x}'_\alpha \qquad \omega \equiv \omega'$$

$$-\omega_{ik} x'_{\alpha k} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j x'_{\alpha k} \qquad \forall \vec{x}'_\alpha$$

$$-\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j \qquad / \varepsilon_{ilk}$$

$$\varepsilon_{lik} \omega_{ik} = -\varepsilon_{ilk} \omega_{ik} = \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{ijk} \Omega_j = 2\delta_{lj} \Omega_j = 2\Omega_l$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace tělesa (soustavy $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$) vůči inerciální soustavě $\langle \sigma, B \rangle$ v bázi B

$$\boxed{\Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lik} \omega_{ik} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{lik} (\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)_{ik}}$$

Pozn. $\omega' = \omega$ a $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$ $\qquad$ dříve bylo $\hat{\Omega}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\mathbb{S}^T \dot{\mathbb{S}})_{jk}$ složky vektoru $\vec{\Omega}$ v bázi $\hat{B}$

Tenzor $\omega = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$ $\qquad \mathbb{S}\mathbb{S}^T = \mathbb{1} \ \Big/ \frac{d}{d\lambda} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = -\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T$

je antisymetrický

$$\omega^T = (-\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)^T = -\mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^T = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T = -\omega$$

$\Downarrow$

Chceme

$$-\omega \vec{X}'_\alpha = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T \vec{X}'_\alpha = \vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha \qquad \omega \equiv \omega'$$

$$-\omega_{ik} X'_{\alpha k} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j X'_{\alpha k} \qquad \forall \vec{X}'_\alpha$$

$$-\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk} \Omega_j \quad \Big/ \varepsilon_{ilk}$$

$$\varepsilon_{lik} \omega_{ik} = -\varepsilon_{ilk} \omega_{ik} = \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{ijk} \Omega_j = 2\delta_{lj} \Omega_j = 2\Omega_l$$

složky pseudovektoru úhlové rychlosti rotace tělesa (soustavy $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{B} \rangle$) vůči inerciální soustavě $\langle \sigma, B \rangle$ v bázi B

$$\boxed{\Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lik} \omega_{ik} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{lik} (\dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^T)_{ik}}$$

Pozn. $\omega' = \omega$ a $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$ $\qquad$ dříve bylo $\hat{\Omega}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\mathbb{S}^T \dot{\mathbb{S}})_{jk}$ složky vektoru $\vec{\Omega}$ v bázi $\hat{B}$

Pohyb bodu $\mathscr{b}_\alpha$ tělesa je popsán je složením translace počátku $\sigma' = \tilde{\sigma}$ a rotace kolem tohoto počátku

$$\dot{\vec{X}}_\alpha = \vec{\Omega} \times (\vec{X}_\alpha - \vec{X}(\tilde{\sigma})) + \dot{\vec{X}}(\tilde{\sigma}) = \vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma') \qquad \forall \alpha \in \hat{N} \quad \Rightarrow$$

Úhlová rychlost nezávisí na volbě počátku σ' a je stejná pro všechny body tělesa

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{x}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma')\right) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\Omega} \times \vec{x}'_\alpha) \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\Omega} \times \vec{x}'_\alpha)^2 =$$

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma') \right) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha \right) \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha \right)^2 =$$

$$\left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha \right)^2 = \left(\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}} \times \mathbb{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha \right)^2 = \left(\mathbb{S}\left(\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha \right) \right)^2 = \left(\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha \right)^2 = \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha_k} \varepsilon_{ilm} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha_m} = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \right) \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha_k} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha_m}$$

$$= \left(\delta_{jl} \tilde{X}_{\alpha k}^2 - \tilde{X}_{\alpha_j} \tilde{X}_{\alpha_l} \right) \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma')\right) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha\right) \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha\right)^2 =$$

$$\left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha\right)^2 = \left(S\tilde{\vec{\Omega}} \times S\tilde{\vec{X}}_\alpha\right)^2 = \left(S(\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha)\right)^2 = \left(\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha\right)^2 = \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha k} \varepsilon_{ilm} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha m} = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha k} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha m}$$

$$= \left(\delta_{jl} \tilde{X}^2_{\alpha k} - \tilde{X}_{\alpha j} \tilde{X}_{\alpha l}\right) \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M} \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \left[\vec{\Omega} \times \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha\right)}_{M\vec{R}'}\right] \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{jl} \tilde{X}^2_{\alpha k} - \tilde{X}_{\alpha j} \tilde{X}_{\alpha l}\right)}_{\tilde{I}_{jl}} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + M\left(\vec{\Omega} \times \vec{R}'\right) \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \frac{1}{2} \tilde{I}_{jl} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$\tilde{I}_{jl}$ tenzor momentu setrvačnosti v tělesové soustavě

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}_\alpha^2 = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha + \dot{\vec{X}}(\sigma')\right) = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha) \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)^2 =$$

$$(\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)^2 = (\$\tilde{\vec{\Omega}} \times \$\tilde{\vec{X}}_\alpha)^2 = (\$(\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha))^2 = (\tilde{\vec{\Omega}} \times \tilde{\vec{X}}_\alpha)^2 = \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha k} \varepsilon_{ilm} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha m} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_{\alpha k} \tilde{\Omega}_l \tilde{X}_{\alpha m}$$

$$= (\delta_{jl} \tilde{X}_{\alpha k}^2 - \tilde{X}_{\alpha j} \tilde{X}_{\alpha l}) \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M} \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + \Big[\vec{\Omega} \times \underbrace{\Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha\Big)}_{M\vec{R}'}\Big] \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{jl} \tilde{X}_{\alpha k}^2 - \tilde{X}_{\alpha j} \tilde{X}_{\alpha l})}_{\tilde{I}_{jl}} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}(\sigma')^2 + M(\vec{\Omega} \times \vec{R}') \cdot \dot{\vec{X}}(\sigma') + \frac{1}{2} \tilde{I}_{jl} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_l$$

$\tilde{I}_{jl}$ tenzor momentu setrvačnosti v tělesové soustavě

Věta: Buď $\sigma' \equiv \tilde{\sigma}$ hmotný střed tělesa, pak $\boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\text{kinetická energie translace těžiště}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{I}_{jk} \tilde{\Omega}_j \tilde{\Omega}_k}_{\text{+ energie rotace vůči ose jdoucí těžištěm}}}$

Dk. $\vec{R}' = 0 \qquad \vec{X}(\sigma') = \vec{R}$

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha\dot{\vec{X}}_\alpha^2=\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha\left(\vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha+\dot{\vec{X}}(\sigma')\right)=\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha\dot{\vec{X}}(\sigma')^2+\sum_\alpha m_\alpha(\vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha)\cdot\dot{\vec{X}}(\sigma')+\sum_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha(\vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha)^2=$$

$$(\vec{\Omega}\times\vec{X}'_\alpha)^2=(\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}}\times\mathbb{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha)^2=(\mathbb{S}(\tilde{\vec{\Omega}}\times\tilde{\vec{X}}_\alpha))^2=(\tilde{\vec{\Omega}}\times\tilde{\vec{X}}_\alpha)^2=\varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j\tilde{X}_{\alpha k}\varepsilon_{ilm}\tilde{\Omega}_l\tilde{X}_{\alpha m}=(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})\tilde{\Omega}_j\tilde{X}_{\alpha k}\tilde{\Omega}_l\tilde{X}_{\alpha m}$$

$$=(\delta_{jl}\tilde{X}_{\alpha k}^2-\tilde{X}_{\alpha j}\tilde{X}_{\alpha l})\tilde{\Omega}_j\tilde{\Omega}_l$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{M}\dot{\vec{X}}(\sigma')^2+\left[\vec{\Omega}\times\underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha\vec{X}'_\alpha\right)}_{M\vec{R}'}\right]\cdot\dot{\vec{X}}(\sigma')+\frac{1}{2}\underbrace{\sum_\alpha m_\alpha(\delta_{jl}\tilde{X}_{\alpha k}^2-\tilde{X}_{\alpha j}\tilde{X}_{\alpha l})}_{\tilde{I}_{jl}}\tilde{\Omega}_j\tilde{\Omega}_l=\frac{1}{2}M\dot{\vec{X}}(\sigma')^2+M(\vec{\Omega}\times\vec{R}')\cdot\dot{\vec{X}}(\sigma')+\frac{1}{2}\tilde{I}_{jl}\tilde{\Omega}_j\tilde{\Omega}_l$$

$\tilde{I}_{jl}$ tenzor momentu setrvačnosti v tělesové soustavě

Věta: Buď $\sigma'\equiv\bar{\sigma}$ hmotný střed tělesa, pak $\boxed{T=\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2}_{}+\underbrace{\frac{1}{2}\tilde{I}_{jk}\tilde{\Omega}_j\tilde{\Omega}_k}_{}}$ Dk. $\vec{R}'=0$ $\quad\vec{X}(\sigma')=\vec{R}$

kinetická energie translace těžiště + energie rotace vůči ose jdoucí těžištěm

Tenzor momentu setrvačnosti $I_{jk}=\sum_\alpha m_\alpha(\delta_{jk}\vec{X}_\alpha^2-X_{\alpha j}X_{\alpha k})$ maticově $\mathbb{I}=\sum_\alpha m_\alpha\left[\underbrace{(\vec{X}_\alpha^T\vec{X}_\alpha)}_{\vec{X}_\alpha\cdot\vec{X}_\alpha}\mathbb{1}-\underbrace{\vec{X}_\alpha\vec{X}_\alpha^T}_{\vec{X}_\alpha\otimes\vec{X}_\alpha}\right]$

$I_{jk}=\int_V\rho(\vec{x})(\delta_{jk}\vec{x}^2-x_jx_k)\,dV$ pro spojité rozložení hmoty

tenzorový součin

Transformace $\tilde{I}_{jk}=I'_{lm}S_{lj}S_{mk}$ $\quad\mathbb{S}\in SO(3)$ $\quad\tilde{\mathbb{I}}=\mathbb{S}^T\mathbb{I}'\mathbb{S}$

$\mathbb{I}'(t)=\mathbb{S}(t)\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T(t)$ v soustavě hm. středu závisí na čase

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle \sigma, B\rangle \rightarrow \langle \sigma'(t), B\rangle)$
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle \sigma', B\rangle \rightarrow \langle \sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ $\Bigg\}$ neznámé $\vec{R}(t) = ?$ $\mathbb{S}(t) = ?$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu ($\langle \sigma, B \rangle \to \langle \sigma'(t), B \rangle$)
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. ($\langle \sigma', B \rangle \to \langle \sigma', \tilde{B}(t) \rangle$)

neznámé $\vec{R}(t) = ?$, $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle \sigma, B\rangle \to \langle \sigma'(t), B\rangle)$
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle \sigma', B\rangle \to \langle \sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ } neznámé $\vec{R}(t) = ?$ $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle \sigma, B\rangle \to \langle \sigma'(t), B\rangle)$ } neznámé $\vec{R}(t) = ?$
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle \sigma', B\rangle \to \langle \sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ } $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \dot{\vec{X}}'_\alpha\right)_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)\right)_i = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j} \varepsilon_{klm} \Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X'_{\alpha j} X'_{\alpha m} \Omega_l =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il} X'_{\alpha j} X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i} X'_{\alpha l})}_{I'_{il}} \Omega_l = I'_{il} \Omega_l = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i$$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle\sigma, B\rangle \to \langle\sigma'(t), B\rangle)$ složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle\sigma', B\rangle \to \langle\sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ } neznámé $\vec{R}(t) = ?$ $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \dot{\vec{X}}'_\alpha\right)_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)\right)_i = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j} \varepsilon_{klm} \Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X'_{\alpha j} X'_{\alpha m} \Omega_l =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il} X'_{\alpha j} X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i} X'_{\alpha l})}_{I'_{il}} \Omega_l = I'_{il} \Omega_l = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i$$

$$\vec{L}' = \mathbb{I}\vec{\Omega} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}} = \mathbb{S}\underbrace{\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}}_{(\vec{L}')_{\tilde{B}}}$$

Pozn. $\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} \neq \dot{\vec{L}} = 0$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle \sigma, B\rangle \to \langle \sigma'(t), B\rangle)$
složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle \sigma', B\rangle \to \langle \sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ $\Big\}$ neznámé $\vec{R}(t) = ?$ $\mathbb{S}(t) = ?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\qquad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\qquad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \dot{\vec{X}}'_\alpha\Big)_i = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)\Big)_i = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j} \varepsilon_{klm} \Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X'_{\alpha j} X'_{\alpha m} \Omega_l =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il} X'_{\alpha j} X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i} X'_{\alpha l})}_{I'_{il}} \Omega_l = I'_{il}\Omega_l = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i$$

$$\vec{L}' = \mathbb{I}\vec{\Omega} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}} = \mathbb{S}\underbrace{\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}}_{(\vec{L}')_{\tilde{B}}}$$

Pozn. $\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} \neq \tilde{\vec{L}} = 0$

$$\dot{\vec{L}}' = (\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}})^\cdot = \dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\underbrace{\dot{\tilde{\mathbb{I}}}}_{=0}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} \overset{\text{2.V.I.}}{=} \vec{N}'^{(e)} = \sum_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \vec{F}'^{(e)}_\alpha = \sum_\alpha (\mathbb{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha \times \mathbb{S}\tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha) = \mathbb{S}\Big(\sum_\alpha \tilde{\vec{X}}_\alpha \times \tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha\Big) = \mathbb{S}\tilde{\vec{N}}^{(e)} \quad \Big/ \mathbb{S}^T$$

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho hmotného středu $(\langle\sigma, B\rangle \to \langle\sigma'(t), B\rangle)$ složený s rotačním pohybem vůči hm. s. $(\langle\sigma', B\rangle \to \langle\sigma', \tilde{B}(t)\rangle)$ } neznámé $\vec{R}(t)=?$ $\mathbb{S}(t)=?$

1. Věta Impulsová v inerciální soustavě $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$ $\quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$ $\quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

2. Věta Impulsová v soustavě hmotného středu $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ ← předeveme ji do soustavy tělesové

$$(\vec{L}')_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \dot{\vec{X}}'_\alpha\right)_i = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{X}'_\alpha \times (\vec{\Omega} \times \vec{X}'_\alpha)\right)_i = \sum_\alpha m_\alpha \varepsilon_{ijk} X'_{\alpha j} \varepsilon_{klm} \Omega_l X'_{\alpha m} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) X'_{\alpha j} X'_{\alpha m} \Omega_l =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha (\delta_{il} X'_{\alpha j} X'_{\alpha j} - X'_{\alpha i} X'_{\alpha l})}_{I'_{il}} \Omega_l = I'_{il}\Omega_l = (\mathbb{I}'\vec{\Omega})_i$$

$$\vec{L}' = \mathbb{I}\vec{\Omega} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{\Omega}} = \mathbb{S}\underbrace{\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}}_{(\vec{L}')_{\tilde{B}}}$$

Pozn. $\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} \neq \tilde{\vec{L}} = 0$

$$\dot{\vec{L}}' = (\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}})^{\cdot} = \dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\overbrace{\dot{\tilde{\mathbb{I}}}}^{=0}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} \overset{\text{2.V.I.}}{=} \vec{N}'^{(e)} = \sum_\alpha \vec{X}'_\alpha \times \vec{F}'^{(e)}_\alpha = \sum_\alpha (\mathbb{S}\tilde{\vec{X}}_\alpha \times \mathbb{S}\tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha) = \mathbb{S}\left(\sum_\alpha \tilde{\vec{X}}_\alpha \times \tilde{\vec{F}}^{(e)}_\alpha\right) = \mathbb{S}\tilde{\vec{N}}^{(e)} \quad /\mathbb{S}^T$$

$$\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}}\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}} + \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} = \mathbb{S}^T\mathbb{S}\tilde{\vec{N}}^{(e)} \quad \Big/ \mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = -\tilde{\omega} = \tilde{\vec{\Omega}}\times$$

$$\tilde{\vec{\Omega}} \times (\tilde{\mathbb{I}}\tilde{\vec{\Omega}}) + \tilde{\mathbb{I}}\dot{\tilde{\vec{\Omega}}} = \tilde{\vec{N}}^{(e)}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice

$$\varepsilon_{ijk}\tilde{\Omega}_j\tilde{I}_{kl}\tilde{\Omega}_l + \tilde{I}_{ij}\dot{\tilde{\Omega}}_j = \tilde{N}^{(e)}_i \quad \forall i = 1,2,3$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti

$$\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti

$$\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$$

Setrvačníky volné ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} = 0$) – řešitelné analyticky

1) volný sférický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$) setrvačník

Euler rce. $\tilde{I}_j \dot{\tilde{\Omega}}_j = 0 \quad \forall j = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tilde{\Omega}}(t) = \text{konst.}$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti

$$\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$$

Setrvačníky volné ($\vec{N}^{(e)} = 0$) – řešitelné analyticky

1) volný sférický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$) setrvačník

Euler rce. $\tilde{I}_j \dot{\tilde{\Omega}}_j = 0 \quad \forall j = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tilde{\Omega}}(t) = \text{konst.}$

2) volný symetrický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$) setrvačník

$$I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\, \Omega_2 \Omega_3 = 0$$
$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\, \Omega_3 \Omega_1 = 0$$
$$I_3 \dot{\Omega}_3 + \underbrace{(I_2 - I_3)}_{=0}\, \Omega_3 \Omega_2 = 0$$

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti

$$\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$$

Setrvačníky volné ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} = 0$) – řešitelné analyticky

1) volný sférický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$) setrvačník   Euler rce. $\tilde{I}_j \dot{\tilde{\Omega}}_j = 0 \ \forall j = 1,2,3 \Rightarrow \vec{\tilde{\Omega}}(\lambda) = \text{konst.}$

2) volný symetrický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$) setrvačník

$$I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0 \quad \Big/ \frac{d}{d\lambda}$$
$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega_1\Omega_3$$
$$I_3 \dot{\Omega}_3 + \underbrace{(I_2 - I_3)}_{=0}\Omega_3\Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow I_3\dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3(\lambda) = \text{konst.}$$

$$I_1 \ddot{\Omega}_1 + (I_3 - I_1)\dot{\Omega}_2\Omega_3 = 0$$
$$\ddot{\Omega}_1 + \underbrace{\frac{(I_3 - I_1)^2 \Omega_3^2}{I_1^2}}_{\nu^2 > 0} \Omega_1 = 0$$

řešení

$$\Omega_1(\lambda) = A\cos(\nu\lambda + \varphi)$$
$$\Omega_2(\lambda) = A\sin(\nu\lambda + \varphi)$$
$$\Omega_3(\lambda) = \text{konst.}$$

3) volný asymetrický ($\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3 \neq \tilde{I}_1$) setrvačník – řešení pomocí eliptických funkcí

Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde{I}_{jk} = \tilde{I}_{kj}$ a proto diagonalizovatelný v ON bázi (polární báze $\tilde{B}$) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti a diagonální členy I_1, I_2, I_3 hlavní momenty setrvačnosti

$$\tilde{\mathbb{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}_3 \end{pmatrix}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti

$$\boxed{\tilde{I}_i \dot{\tilde{\Omega}}_i + \varepsilon_{ijk} \tilde{\Omega}_j \tilde{I}_k \tilde{\Omega}_k = \tilde{N}_i^{(e)} \quad \forall i = 1,2,3}$$

Setrvačníky volné ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} = 0$) – řešitelné analyticky

1) volný sférický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \tilde{I}_3$) setrvačník Euler rce. $\tilde{I}_j \dot{\tilde{\Omega}}_j = 0 \ \forall j = 1,2,3 \Rightarrow \vec{\tilde{\Omega}}(t) = \text{konst.}$

2) volný symetrický ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$) setrvačník

$$I_1 \dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2 \Omega_3 = 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3 \Omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \dot{\Omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \Omega_1 \Omega_3$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 + (\underbrace{I_2 - I_3}_{=0})\Omega_3 \Omega_2 = 0 \quad \Rightarrow I_3 \dot{\Omega}_3 = 0 \Rightarrow \Omega_3(t) = \text{konst.}$$

$$I_1 \ddot{\Omega}_1 + (I_3 - I_1)\dot{\Omega}_2 \Omega_3 = 0$$

$$\ddot{\Omega}_1 + \underbrace{\frac{(I_3 - I_1)^2 \Omega_3^2}{I_1^2}}_{\nu^2 > 0} \Omega_1 = 0$$

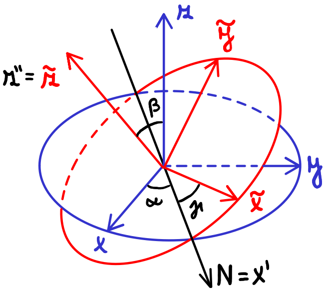
řešení

$$\Omega_1(t) = A\cos(\nu t + \varphi)$$
$$\Omega_2(t) = A\sin(\nu t + \varphi)$$
$$\Omega_3(t) = \text{konst.}$$

3) volný asymetrický ($\tilde{I}_1 \neq \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3 \neq \tilde{I}_1$) setrvačník – řešení pomocí eliptických funkcí

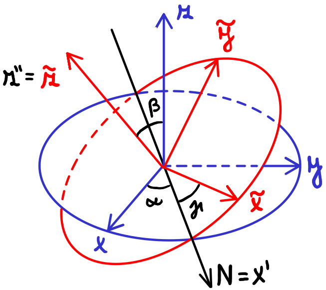
Setrvačníky těžké ($\vec{\tilde{N}}^{(e)} \neq 0$) – řešitelné případy: vyvážený setrvačník se nehybným těžištěm (Euler)
symetrický setrvačník s pevným bodem na hlavní ose rotace $\tilde{z}$ pod těžištěm (Lagrange)
symetrický setrvačník ($\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = 2\tilde{I}_3$) s pevným bodem v rovině x', y' (Kovalevská)

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$

Eulerovy úhly

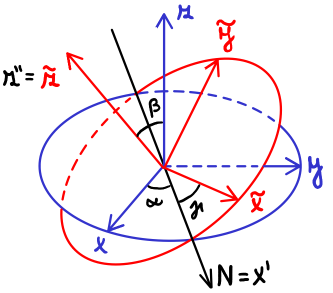


$B \sim (x, y, z)$
$B' \sim (x', y', z')$ } otočení o α kolem osy z

$B' = B\,S(\alpha)$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$ } otočení o α kolem osy z $\quad B' = B\,S(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ } otočení o β kolem osy x' $\quad B'' = B'\,S(\beta)$

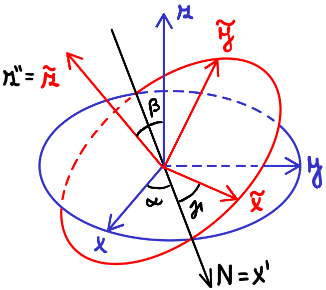
$B'' \sim (x'', y'', z'')$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$ otočení o α kolem osy z $\quad B' = B\,S(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ otočení o β kolem osy x' $\quad B'' = B'\,S(\beta)$

$B'' \sim (x'', y'', z'')$ otočení o γ kolem osy z'' $\quad \tilde{B} = B''\,S(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

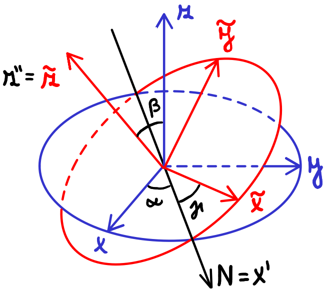
$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$S(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$ — otočení o α kolem osy z — $B' = B\,\mathbb{S}(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ — otočení o β kolem osy x' — $B'' = B'\,\mathbb{S}(\beta)$

$B'' \sim (x'', y'', z'')$ — otočení o γ kolem osy z'' — $\tilde{B} = B''\,\mathbb{S}(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$\mathbb{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{S}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

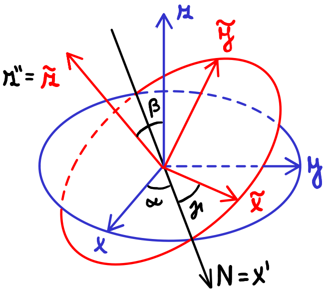
$$\mathbb{S}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = B''\mathbb{S}(\gamma) = B'\mathbb{S}(\beta)\mathbb{S}(\gamma) = B\,\overbrace{\mathbb{S}(\alpha)\,\mathbb{S}(\beta)\,\mathbb{S}(\gamma)}^{\mathbb{S}\ \text{matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}}$$

$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma \\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Eulerovy úhly



$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

$B \sim (x, y, z)$ } otočení o α kolem osy z $\quad B' = B\,S(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ } otočení o β kolem osy x' $\quad B'' = B'\,S(\beta)$

$B'' \sim (x'', y'', z'')$ } otočení o γ kolem osy z'' $\quad \tilde{B} = B''\,S(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$S(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = B'' S(\gamma) = B' S(\beta) S(\gamma) = B\,\overbrace{S(\alpha)\,S(\beta)\,S(\gamma)}^{S \text{ matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}}$$

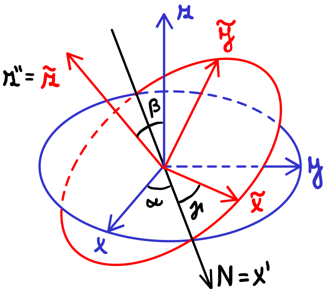
$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -S^T \dot{S} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma \\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Jinak (Euler)

$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{x}' + \dot{\gamma}\vec{\tilde{z}}$$

$$\vec{\tilde{\Omega}} = \dot{\alpha}(\vec{z})_{\tilde{B}} + \dot{\beta}(\vec{x}')_{\tilde{B}} + \dot{\gamma}(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}}$$

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$ } otočení o α kolem osy z $\quad B' = B\,S(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ } otočení o β kolem osy x' $\quad B'' = B'\,S(\beta)$

$B'' \sim (x'', y'', z'')$ } otočení o γ kolem osy z'' $\quad \tilde{B} = B''\,S(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$S(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S matice přechodu od B k $\tilde{B}$

$$\tilde{B} = B''S(\gamma) = B'S(\beta)S(\gamma) = B\,\overbrace{S(\alpha)\,S(\beta)\,S(\gamma)}^{S}$$

$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -S^T\dot{S} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma \\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Jinak (Euler)

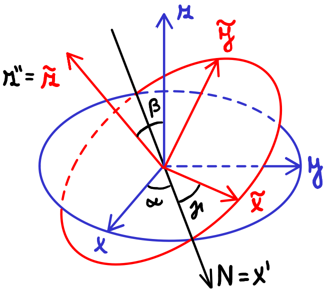
$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{x}' + \dot{\gamma}\vec{\tilde{z}}$$

$$\vec{\tilde{\Omega}} = \dot{\alpha}(\vec{z})_{\tilde{B}} + \dot{\beta}(\vec{x}')_{\tilde{B}} + \dot{\gamma}(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}}$$

$$(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{x}')_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ -\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{z})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma \\ \cos\beta \end{pmatrix} \quad \vec{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$z \perp N \wedge \tilde{z} \perp N \Rightarrow$ projekce z do roviny $\tilde{x}, \tilde{y}$ je kolmá na N $\quad \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \sin\gamma \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \cos\gamma$

Eulerovy úhly



$B \sim (x, y, z)$ } otočení o α kolem osy z $\quad B' = B\,\mathbb{S}(\alpha)$

$B' \sim (x', y', z')$ } otočení o β kolem osy x' $\quad B'' = B'\,\mathbb{S}(\beta)$

$B'' \sim (x'', y'', z'')$ } otočení o γ kolem osy z'' $\quad \tilde{B} = B''\,\mathbb{S}(\gamma)$

$\tilde{B} \sim (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

$$\mathbb{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{S}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \mathbb{S}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = B''\mathbb{S}(\gamma) = B'\mathbb{S}(\beta)\mathbb{S}(\gamma) = B\,\overbrace{\mathbb{S}(\alpha)\,\mathbb{S}(\beta)\,\mathbb{S}(\gamma)}^{\mathbb{S}\ \text{matice přechodu od } B \text{ k } \tilde{B}}$$

$(z, \tilde{z}, N)$ pravotočivá soustava

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & -\tilde{\Omega}_2 \\ & 0 & \tilde{\Omega}_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\omega} = -\mathbb{S}^T\dot{\mathbb{S}} = \dots = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta}\sin\gamma - \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma \\ & 0 & \dot{\beta}\cos\gamma + \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Jinak (Euler)

$$\vec{\Omega} = \dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{x}' + \dot{\gamma}\vec{\tilde{z}}$$

$$\vec{\tilde{\Omega}} = \dot{\alpha}(\vec{z})_{\tilde{B}} + \dot{\beta}(\vec{x}')_{\tilde{B}} + \dot{\gamma}(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}}$$

$$(\vec{\tilde{z}})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{x}')_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ -\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\vec{z})_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta\cos\gamma \\ \cos\beta \end{pmatrix} \quad \vec{\tilde{\Omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$z \perp N \wedge \tilde{z} \perp N \Rightarrow$ projekce z do roviny $\tilde{x}, \tilde{y}$ je kolmá na N $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin\gamma \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma$

Pohyby: Precese $\alpha = \alpha(t) \wedge \beta, \gamma$ konst. $\quad$ Nutace $\beta = \beta(t) \wedge \alpha, \gamma$ konst. $\quad$ Rotace $\gamma = \gamma(t) \wedge \alpha, \beta$ konst.