Transformace (1) $Z_j = Z_j(\vec{r},t)$ třídy $C^{(2)}$ $\forall j \in \widehat{2s}$ $\left|\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right| = \left|\left(\frac{\partial Z_j}{\partial r_i}\right)\right| \neq 0$ $\vec{r} = \begin{pmatrix}\vec{q}\\ \vec{p}\end{pmatrix}$ $\mathbb{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hline -\mathbb{1}_s & 0 \end{array}\right)$

je kanonická pokud

I. $\mathbb{J}_{ik} = [Z_i, Z_k]_r = \frac{\partial r_m}{\partial Z_i} \mathbb{J}_{ml} \frac{\partial r_l}{\partial Z_k} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{mi} \mathbb{J}_{ml} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)_{lk}$ $\forall i,k \in \widehat{2s}$ $\iff$ $\mathbb{J} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T \mathbb{J} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)$ $\Big/ \cdot \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)$

II. $\mathbb{J}_{ik} = \{Z_i, Z_k\}_r = \frac{\partial Z_i}{\partial r_m} \mathbb{J}_{ml} \frac{\partial Z_k}{\partial r_l} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{im} \mathbb{J}_{ml} \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)_{kl}$ $\forall i,k \in \widehat{2s}$ $\iff$ $\mathbb{J} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right) \mathbb{J} \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)^T$

III. Přímé (symplektické) podmínky

symplektický – z řečtiny sym + plektikos = spletený dohromady (Weyl 1939)

$$\mathbb{J}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)}_{\mathbb{A}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)^T}_{(\mathbb{A}^{-1})^T}\mathbb{J} \qquad \mathbb{J}_{il}\frac{\partial Z_l}{\partial r_k} = \frac{\partial r_l}{\partial Z_i}\mathbb{J}_{lk} \quad \forall i,k \in \widehat{2s}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \\ \hline -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{Q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}}\right)^T \\ \hline -\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}}\right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}}\right)^T \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \end{array}} \quad \forall i,j \in \hat{s}$$

Pro časově nezávislou transformaci lze tyto podmínky odvodit i přímým výpočtem derivací složených funkcí z Hamiltonových rovnic.

Podobné (avšak pouze postačující) podmínky lze odvodit i z uzavřenosti forem dF_i, rozdíl je ve funkcích které zde vystupují. Např. pro $dF_1(\vec{q},\vec{Q})$

$$\frac{\partial \hat{P}_i(\vec{q},\vec{Q})}{\partial q_j} = -\frac{\partial \hat{p}_j(\vec{q},\vec{Q})}{\partial Q_i} \quad \text{vs.} \quad \frac{\partial P_i(\vec{q},\vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j(\vec{Q},\vec{P})}{\partial Q_i}\Bigg|_{\vec{Q}(\vec{q},\vec{p}),\vec{P}(\vec{q},\vec{p})}$$

Matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$ se nazývá symplektická $\iff \mathbb{A}^T\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \iff \mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{J}\mathbb{A}^T \iff \mathbb{A}^{-1}\mathbb{J} = \mathbb{J}\mathbb{A}^T$

Kriteria lze shrnout do věty: **Transformace (1) je kanonická $\iff$ její Jacobiho matice je symplektická.**

Kanonické transformace tvoří grupu – tr. souřadnic (třídy $C^{(2)}$) na fázovém prostoru Γ tvoří grupu

- identická transformace je kanonická $\vec{Z} = \vec{r}$ $\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right) = \mathbb{1}$ $\mathbb{1}^T\mathbb{J}\cdot\mathbb{1} = \mathbb{J}$
- inverzní tr. ke kanonické tr. je kanonická $\mathbb{A} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right)$ $\mathbb{A}^{-1} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{Z}}\right)$ $\mathbb{J} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} \Rightarrow \overbrace{(\mathbb{A}^T)^{-1}}^{(\mathbb{A}^{-1})^T}\mathbb{J}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{J}$
- složení kanonických tr. je kanonická tr. $\vec{Z} = \vec{Z}(\vec{r},t)$ $\vec{Y} = \vec{Y}(\vec{Z},t)$ $\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{Z}}\right)$ $\left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{r}}\right) = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{Z}}\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{r}}\right) = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$

Lze to dokázat i pomocí vytvořujících funkcí, ty se při skládání transformací sčítají.

$$(\mathbb{B}\mathbb{A})^T\mathbb{J}(\mathbb{B}\mathbb{A}) = \mathbb{A}^T\underbrace{(\mathbb{B}^T\mathbb{J}\mathbb{B})}_{\mathbb{J}}\mathbb{A} = \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}$$

$\Rightarrow$ symplektické matice tedy tvoří grupu tzv. Symplektická grupa $Sp(2s,\mathbb{R}) = \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s} \mid \mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A} = \mathbb{J}\}$

Tvrzení: Determinant libovolné symplektické matice je roven jedné tj. $\forall \mathbb{A} \in Sp(2s,\mathbb{R})$ $\det\mathbb{A} = 1$

Dk. Pfafián definovaný pro $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{2s,2s}$, $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$ $\quad pf(\mathbb{A}) = \frac{1}{2^s s!}\sum_{\pi \in S_{2s}} \operatorname{sgn}\pi\, A_{\pi(1),\pi(2)}\dots A_{\pi(2s-1),\pi(2s)}$ $\quad pf\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0\end{pmatrix} = a$
má vlastnosti

$$\det\mathbb{A} = (pf\,\mathbb{A})^2 \qquad \forall \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2s,2s}\ pf(\mathbb{B}^T\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{B}\, pf\,\mathbb{A} \qquad pf\,\mathbb{J} = pf(\mathbb{A}^T\mathbb{J}\mathbb{A}) = \det\mathbb{A}\, pf\,\mathbb{J} \Rightarrow \det\mathbb{A} = 1$$

Pozn. Kriteria kanoničnosti nekladou žádné podmínky na funkce K,H (kanoničnost tr. nezávisí na konkrétní fyzikální úloze) ani na časový průběh transformace. Proto lze čas považovat za nezávislý parametr a na časově závislou tr. nahlížet jako na jednoparametrickou množinu po sobě jdoucích časově nezávislých transformací. Kanoničnost transformace znamená zachování symplektické formy.

Symplektický vektorový prostor (V,ω) je vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ vybavený symplektickou formou ω

Symplektická forma ω na V je zobrazení $\omega: V\times V \to \mathbb{R}$, které je současně

- bilineární $\quad \omega(x,y) = \omega(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j \omega(e_i,e_j) = x^i y^j \omega_{ij} = \vec{x}^T\omega\vec{y}$ $\quad$ ($\dim V = m$ a $(e_1,\dots,e_m)$ báze V)
- antisymetrické $\quad \omega(x,y) = -\omega(y,x)\ \forall x,y \in V$
- nedegenerované $\quad (\omega(x,y) = 0\ \forall y \in V) \Rightarrow x = 0$

$\left.\begin{array}{l}\omega^T = -\omega \\ \det(\omega) \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \dim V = 2s$

dimenze symplektického pr. je vždy sudá

Pozn. Ve V exituje tzv. symplektická báze ve které je $\omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1}_s \\ \hline -\mathbb{1}_s & 0\end{array}\right) = \mathbb{J}$

Automorfizmy (symetrie) prostoru (V,ω) jsou lineární bijekce $A: V \to V$ zachovávající formu ω
tj. $\omega(Ax,Ay) = \omega(x,y)\ \forall x,y \in V$ $\quad$ v bázi V $\quad (\mathbb{A}\vec{x})^T\omega\mathbb{A}\vec{y} = \vec{x}^T\mathbb{A}^T\omega\mathbb{A}\vec{y} = \vec{x}^T\omega\vec{y}\ \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^m$

Pozn. Nedegenerovanou bilineární formu lze využít k ztotožnění vek. pr. V a jeho duálu V^*
$\forall \alpha \in V^*\ \exists_1 v \in V\ \forall u \in V\ \ \alpha(u) = \omega(u,v)$ $\quad$ zobrazení $b_\omega(v) = \omega(.,v)$ je izomorsizmus V na V^*

Hamilton–Jacobiho rovnice (HJR)

Hledáme vytvořující funkci kanonické tr. 2. druhu $F_2(\vec{q},\vec{P},t)$ která převede zadaný hamiltonián H na co nejjednodušší tvar tj. řeší rovnici $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ kde je dosazeno $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ do fce. $H(\vec{q},\vec{p},t)$.

Což je parciání diferenciání rovnice určující jak F_2 závisí na $\vec{q}$ a t. Pak

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \Rightarrow Q_j = \text{Konst.}$$
$$\dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{Konst.}$$

Hledaná časově závislá transformace představuje přechod $(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F_2} (\vec{Q},\vec{P})$ do souřadnic, ve kterých je systém v klidu.

Pozn. Lze hledat i vytvořující funkce jiných druhů např. $F_3(\vec{p},\vec{Q},t)$ – pak dosazujeme do H za $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$

Hamilton–Jacobiho rovnice je parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci S závisející na $s+1$ navzájem nezávislých proměnných $\vec{q},t$.

$$\boxed{H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

Její řešení (úplný integrál HJR) závisí na $s+1$ integračních konstantách.

Neboť S vystupuje v rovnici pouze skrze své derivace, je určeno až na aditivní konstantu, kterou lze považovat za jednu z těchto $s+1$ konstant. Zbylých s konstant označíme $P_1,\dots,P_s$.

Řesení HJR $S = S(\vec{q},t,\vec{P})$, nazývané <u>hlavní funkce Hamiltonova</u>, obsahuje úplnou informaci o systému.

Jacobiho věta: Hlavní funkce Hamiltonova $S(\vec{q},t,\vec{P})$ je vytvořující funkce kanonické transformace $(\vec{Q},\vec{P}) \longrightarrow (\vec{q},\vec{p})$ která udává pohyb dané soustavy tj.

$$\forall j \in \hat{s} \quad Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow q_i = q_i(t,\vec{Q},\vec{P}) \quad \forall i \in \hat{s}$$
$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(\vec{q},t,\vec{P}) \longrightarrow p_i = p_i(t,\vec{Q},\vec{P})$$

je fázová trajektorie soustavy s Hamiltonovou funkcí $H = -\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{(\vec{q},t,\vec{P}(\vec{q},\vec{p},t))}$

Pozn. k $\frac{\partial S}{\partial P_j}$ Fce. $S(\vec{q},t,\vec{P})$ je funkcí $2s+1$ nezávislých proměnných $\vec{q},t,\vec{P}$ přičemž proměnné $\vec{P}$ jsou konstanty (integrály pohybu) pouze pro soustavu popsanou Hamiltonovou funkcí H.
Tr. danou fcí. S lze použít i na jiný systém se stejným s, pak už ale $\vec{P}$ konstantní být nemusí.

Význam hlavní funkce Hamiltonovy

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{H.R.} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{p_j}\dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{-H} + \frac{\partial S}{\partial P_k}\underbrace{\dot{P}_k}_{0} = p_j\dot{q}_j - H = L$$

derivace podél fázové trajektorie; vytvořující fce.; HJR; integrál pohybu

$$S(\vec{q},\tilde{t},\vec{Q}) = \int_{t_0(\vec{Q})}^{\tilde{t}(\vec{q})} L(\vec{q}(t),\dot{\vec{q}}(t),t)\,dt$$

Hlavní fce. Hamiltonova je akce vypočtená podél skutečné trajektorie v konfiguračním prostoru vycházející v čase t_0 z bodu $\vec{Q}$ (s hybností $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$) jako funkce "horní meze" $\vec{q}$ v čase $\tilde{t}$.

Př. Volný hmotný bod $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2$ $\quad H = \frac{p_i^2}{2m}$ $\quad$ HJR $\quad H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ $\quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ $\quad \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

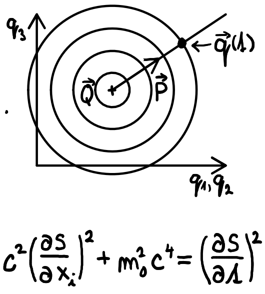
$q_i(t) = Q_i + v_i t \qquad v_i = \frac{q_i - Q_i}{t} = \text{Konst.}$

$t_0 = 0$ čas kdy $\vec{q}(t) = \vec{Q}$

$$S = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}m\dot{q}_i^2\,d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}mv_i^2\,d\tilde{t} = \left[\frac{1}{2}mv_i^2\tilde{t}\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}mv_i^2 t = \frac{m}{2t}(q_i - Q_i)^2$$

Pozn.

1) $S = S(\vec{q},t,\vec{Q})$ lze považovat za rovnici vlnoplochy šířící se konfiguračním pr. M.
Pro dané t představuje $S(\vec{q},t,\vec{Q}) = \text{Konst.}$ rovnici nadplochy v konf. pr. M, která se při změně t šíří jako "čelo rázové vlny". Bod popisující konfiguraci systému je bodem této nadplochy určeným podmínkou $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{Q}}$. Kanonická hybnost $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla_q S$ je normálou k této nadploše a pokud je rovnoběžná s obecnou rychlostí $\dot{\vec{q}}$, pak trajektorie jsou kolmé k nadplochám. Na vývoj systému tak lze pohlížet jako šíření vlnoplochy v konfiguračním prostoru a na trajektorie jako na paprsky.



2) Rovnice eikonálu ve vakuu $\sum_{i=1}^{3} n^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$ odpovídá HJR fotonu $H = c\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2c^2}$, $\quad \sum_{i=1}^{3} c^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + m_0^2c^4 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2$

3) Schrődingerova rce. $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\vec{x})\cdot\psi$ pro vlnovou funkci $\psi = \psi(\vec{x},t)$ kde $P_{rob.}(\vec{x},t) = \bar{\psi}\psi\,dV$

hledáme-li řešení tvaru $\psi(\vec{x},t) = C\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)\right]$ pak rovnice pro S $\quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + U(\vec{x}) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Delta S$

v limitě pro $\hbar \to 0$ přejde na HJR (Klasická limita kvantové mechaniky)

Plochy konstantní fáze $S = \text{Konst.}$ vlnové fce. ψ kvant. mech. jsou v této limitě kolmé na klasické trajektorie.