Konfigurační prostor M – polohy systému, $\dim M = s$ souřadnice $(q_1, \dots, q_s)$

Fázový prostor Γ – stavy systému, $\dim \Gamma = 2s$ souřadnice $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$

Pozn. hybnost "klasická" (kinetická) $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ vektor X hybnost obecná (kanonická) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ kovektor

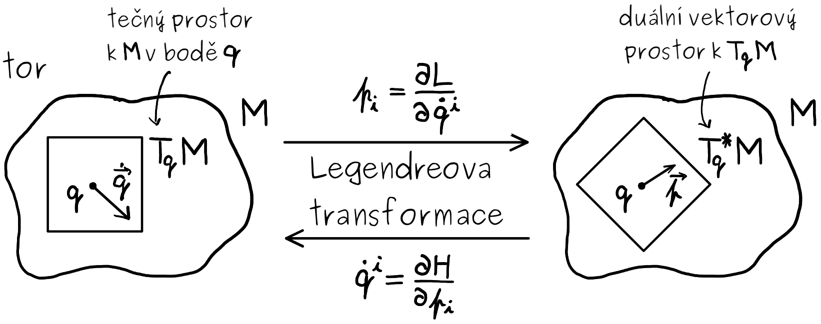
Pozn. Geometrie

Rychlostní fázový prostor (tečný bandl)

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M$$

Lagrangeova funkce

$$L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



Fázový prostor (kotečný bandl)

$$\Gamma = T^*M = \bigcup_{q \in M} T_q^* M$$

Hamiltonova funkce

$$H : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Hamiltonovy rovnice (*dynamický systém na fázovém prostoru*)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \qquad q_i(t+dt) = q_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \forall i \in \hat{s} \qquad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt \qquad p_i(t+dt) = p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$

Taylor do 1. řádu v dt => numerické řešení

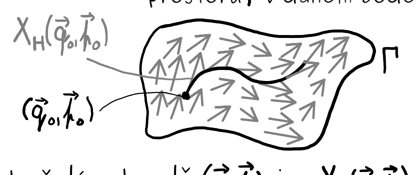
Vektorové pole (hamiltonovské)

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}}$$

bazické vektory tečného prostoru k fázovému prostoru Γ v daném bodě

<u>Fázová trajektorie</u> – je řešení Hamiltonových rovnic $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$

- je určena jednoznačně počátečními podmínkami $\vec{q}(0) = \vec{q}_0, \vec{p}(0) = \vec{p}_0$
- kažým bodem Γ prochází právě jedna fázová trajektorie
- je integrální křivka pole X_H parametrizovaná časem tj. její tečný vektor v každém bodě $(\vec{q}, \vec{p})$ je $X_H(\vec{q}, \vec{p})$



Pozn. Hamiltonián H (resp. pole X_H) je generátorem časového vývoje = toku vektorového pole X_H

<u>Fázový portrét</u> – obraz na kterém jsou fázové trajektorie pro všechny počáteční podmínky (zobrazuje tzv. hamiltonovský tok – tok hamiltonovského vektorového pole X_H)

Př. Harmonický oscilátor $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$ $\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \to \dot{q} = \frac{p}{m}$ $\quad H(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$

Hamiltonovy rovnice

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned}\right\}$$

řešení $\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0$

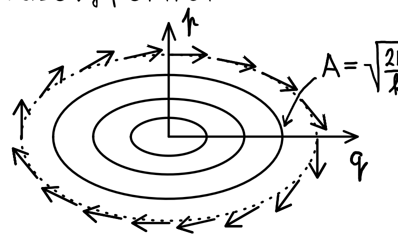
Fázová trajektorie

$$q(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B\right)$$

$$p(t) = -\underbrace{\sqrt{km}\, A}_{\sqrt{2mE}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B\right)$$

Hamiltonovské vektorové pole $X_H = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kq \end{pmatrix}$

Fázový portrét



Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \text{Konst.} \Rightarrow H = \text{konst.} \qquad \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E \qquad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1$$

Poissonovy závorky a Integrály Pohybu

Funkce $F = F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ na fázovém prostoru se se nazývá <u>integrálem pohybu</u> (I. P.), pokud pro každou fázovou trajektorii $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = C \quad \forall t$.

$$\tilde{F}(t) = F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = C \iff 0 = \frac{d\tilde{F}}{dt} = \left.\frac{\hat{d}F}{dt}\right|_{H.R.} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}}{\dot{q}_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \underset{\overset{\shortparallel}{-\frac{\partial H}{\partial q_i}}}{\dot{p}_i} + \frac{\partial F}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{\{F,H\}} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

<u>Věta</u> Funkce $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ je integrálem pohybu pro systém s Hamiltonovou funkcí $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ $\iff$ $\boxed{\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0}$

<u>Poissonova závorka</u> diferencovatelných funkcí F, G
na fázovém prostoru
$$\{F,G\} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}$$

Pozn. $\{.,.\} : C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Gamma)$
Vektorový prostor hladkých funkcí na Γ
tj. fcí. třídy C^∞ na Γ

Vlastnosti Poissonových závorek $\forall F, G, F_1, F_2, F_3 \in C^2(\Gamma)$ platí:

1) antisymetrie $\{F,G\} = -\{G,F\} \quad \Rightarrow \{F,F\} = 0$
2) bilinearita $\{c_1F_1 + c_2F_2, G\} = c_1\{F_1,G\} + c_2\{F_2,G\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
3) Jacobiho identita $\{F_1,\{F_2,F_3\}\} + \{F_2,\{F_3,F_1\}\} + \{F_3,\{F_1,F_2\}\} = 0$
4) Leibnitzovo pravidlo $\{F_1 \cdot F_2, G\} = \{F_1,G\}\cdot F_2 + F_1\cdot\{F_2,G\}$
5) derivace podle parametru $\frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} = \{\frac{\partial F}{\partial t}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial t}\}$
6) fundamentální Poissonovy závorky $\{q_i,q_j\} = 0 = \{p_i,p_j\}$, $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$

Lineární algebra je vektorový prostor V vybavený bilineární operací : $V\times V \to V$.

Lieova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\})$
je lineární algebra jejíž operace je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu.

Poissonova algebra $(\overbrace{C^\infty(\Gamma), \{.,.\}}, \cdot)$

Asociativní algebra je lineární algebra jejíž operace je asociativní.

Hamiltonovy rovnice $\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \forall i \in \hat{s} \quad \to q_i, p_i$ jsou tzv. kanonicky sdružené proměnné

Pozn. Q.M. pozorovatelným A, B přiřadí samosdružené operátory $\hat{A}, \hat{B}$ na Hilbertově prostoru stavů (kvadr. int. vlnových funkcí $\psi(\vec{x}, t)$),
jejichž (reálné) vlastní hodnoty odpovídají měřitelným hodnotám veličin, tak aby $C = \{A,B\} \Rightarrow \hat{C} = i\hbar(\hat{A}\circ\hat{B} - \hat{B}\circ\hat{A}) = i\hbar\underbrace{[\hat{A},\hat{B}]}_{\text{komutátor}}$
$C = f(A_1,\dots,A_k) \Rightarrow \hat{C} = f(\hat{A}_1,\dots,\hat{A}_k)$ (princip korespondence) $\quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$ kvůli rozměru (J.s)
např. $x_j \to \hat{x}_j(\psi) = x_j\cdot\psi \quad p_k \to \hat{p}_k(\psi) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}\psi \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad \hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \quad (i^2 = -1)$ kvůli samosdruženosti

<u>Poissonova věta:</u> Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

I. P. tvoří Lieovu algebru

Dk. F_1, F_2 jsou I. P. pro systém s Hamiltonovou funkcí H $\quad \left.\frac{dF_i}{dt}\right|_{H.R.} = \{F_i, H\} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0 \quad i = 1,2$

$$\left.\frac{d\{F_1,F_2\}}{dt}\right|_{H.R.} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \{\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2\} + \{F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t}\} =$$
$$= \{\{F_1,F_2\},H\} - \{\{F_1,H\},F_2\} - \{F_1,\{F_2,H\}\} = \{\{F_1,F_2\},H\} + \{\{H,F_1\},F_2\} + \{\{F_2,H\},F_1\} = 0$$

Integrály pohybu snadno najdeme na základě proměnných které chybí v předpisu Hamiltonovy funkce

1) čas $t \quad H = H(\vec{q}, \vec{p})$ tj. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dH}{dt}\right|_{H.R.} = \{H,H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow$ Hamiltonova funkce $H = H(\vec{q},\vec{p}) = \text{Konst.}$
2) cyklické souřadnice q_j tj. $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \text{Konst.}$ obdobně pro p_j tj. $\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \Rightarrow q_j = \text{Konst.}$

Odvození Hamiltonových rovnic z Hamiltonova principu – variace křivek $\vec{q}(t)$ v konfiguračním prostoru

$$0 = \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(\underbrace{\vec{q},\dot{\vec{q}},t}_{\text{nezávislé proměnné } L})\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}(\hat{p}_i\dot{q}_i - H(\vec{q},\hat{\vec{p}},t))\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(\dot{q}_i\delta\hat{p}_i + \underbrace{\hat{p}_i\delta\dot{q}_i}_{\frac{d}{dt}(\hat{p}_i\delta q_i) - \dot{\hat{p}}_i\delta q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial \hat{p}_i}\delta\hat{p}_i)\,dt =$$

pro
$\delta\vec{q}(t_1) = 0$
$\delta\vec{q}(t_2) = 0$
$\hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\underbrace{\left(-\dot{\hat{p}}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)}_{\text{II. } 0 \overset{\text{ZLVP}}{\Longleftarrow}}\underbrace{\delta q_i}_{\text{vzájemně nezávislé}} + \underbrace{\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial \hat{p}_i}\right)}_{=0 \text{ přímým výpočtem derivace (I.)}}\delta\hat{p}_i\right]dt + \underbrace{\left[\hat{p}_i\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ pevné konce}}$$

Pracujeme v proměnných $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ a až při zápisu výsledných rovnic přejdeme od $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ k $\vec{q}, \vec{p}$ a zrušíme tak střechy u $\vec{p}$

Variace $\delta\vec{q}$ a $\delta\hat{\vec{p}}$ nejsou navzájem nezávislé což nevadí neboť koeficienty u $\delta\hat{\vec{p}}$ jsou nula.

Modifikovaný Hamiltonův princip na fázovém prostoru – variace křivek $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ ve fázovém prostoru

$$0 = \delta\bar{S} = \delta\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{(p_i\dot{q}_i - H(\vec{q},\vec{p},t))}_{F(\vec{q},\vec{p},\dot{\vec{q}},\dot{\vec{p}},t)}\,dt$$
nezávislé proměnné F

pro
$\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$
$\delta\vec{p}(t_1) = 0 = \delta\vec{p}(t_2) \leftarrow$ není nutné

Eulerovy–Lagrangeovy rce. pro funkcionál $\bar{S}$ (akci na fázovém pr.)

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(p_i\delta_{ij}) + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_j}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0 - \delta_{ij}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

V této formulaci začínáme s akcí $\bar{S}$ na Γ. Variace $\delta\vec{q}$ a $\delta\vec{p}$ považujeme za nezávislé, stejně tak proměnné $\vec{q}, \vec{p}$, které již nejsou svázány definicí obecné hybnosti, nýbrž jen Hamiltonovými rovnicemi. V tomto smyslu již mají obě sady Hamiltonových rovnic dynamický obsah.