Lagrangeův formalizmus (pro N hm. bodů v $\mathbb{R}^3$ v inerciální soustavě)

kartézské souřadnice $\vec{X} = (x_1, \dots, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$

Lagrangeova funkce v kartézských $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$

Kinetická energie $T(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T \mathbb{M} \dot{\vec{x}}$ $\quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{3N} \end{pmatrix}$

Zobecněný potenciál $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right)$

P. D. kvadratická forma, homogenní funkce stupně 2

r nezávislých ideálních holonomních vazeb $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$ je LN na $M(t)$

Konfigurační prostor $M(t) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x}, t) = 0 \ \forall k \in \hat{r}\}$

(varieta) $\dim M(t) = 3N - r = s$ počet stupňů volnosti

obecné souřadnice $q_i, i \in \hat{s}$ $\quad \vec{q} = (q_1, \dots, q_s)$ $\quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{q}, t)$ $\quad \hat{f}_k(\vec{q}, t) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, t), t) = 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \ \forall k \in \hat{r}$

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r}$$

d'Alembertův princip

$$0 = \delta A_{ef} = (\vec{F} - \mathbb{M}\ddot{\vec{x}}) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i$$

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \nabla f_k \cdot \delta\vec{x} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta x_j = 0$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} = Q_i^{(nep)} \quad \forall i \in \hat{s}$$

$$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{x}(\vec{q}, t), \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t)$$

Hamiltonův princip Skutečná trajektorie $\vec{q}(t)$ holonomní soustavy, podrobené zobecněným potenciálním silám, v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je extremálou (stacionární hodnoutou tj. $\delta S[\vec{q}(t)] = 0$) akce

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \hat{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt$$

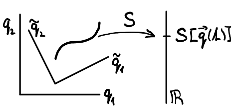
vzhledem k izochronním variacím s pevnými konci $\delta\vec{q}(t_1) = 0 = \delta\vec{q}(t_2)$.

Důsledky Hamiltonova principu

1) Nezávislost na souřadnicích $\vec{q} = \vec{q}(\tilde{\vec{q}}, t)$ $\quad \det\left(\frac{q_i}{\tilde{q}_j}\right) \neq 0$

$$\tilde{L}(\tilde{\vec{q}}, \dot{\tilde{\vec{q}}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \qquad \tilde{S}[\tilde{\vec{q}}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\tilde{\vec{q}}(t), \dot{\tilde{\vec{q}}}(t), t)\, dt = S[\vec{q}(t)]$$

LR2D mají stejný tvar ve všech obecných souřadnicích



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

2) Nejednoznačnost Lagrangeovy funkce

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{\hat{d}}{dt} h(\vec{q}, t) \qquad S'[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L'(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt = S[\vec{q}(t)] + \overbrace{\left[h(\vec{q}(t), t)\right]_{t_1}^{t_2}}^{\text{konst.}}$$

Hamiltonův formalizmus (pro holonomní soustavy a potenciální síly v obecných souřadnicích)

Pozn: Kanonický tvar obyčejných diferenciálních rovnic $y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_s) \quad \forall i \in \hat{s}$

$$\text{LR2D} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \underbrace{\dot{q}_j}_{v_j} + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}}_{\mathbb{L}_{ij}} \underbrace{\ddot{q}_j}_{\dot{v}_j} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{s}$$

$$\det \mathbb{L} = \left|\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right)\right| = \left|\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\right| \neq 0$$

$$\longrightarrow \quad \dot{q}_j = v_j \quad \forall j \in \hat{s}$$

$$\dot{v}_k = (\mathbb{L}^{-1})_{ki} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} v_j\right]\Bigg|_{\dot{\vec{q}} = \vec{v}} \quad \forall k \in \hat{s}$$

Jinak

$$0 = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \longrightarrow \dot{q}_j = \hat{\dot{q}}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad \forall j \in \hat{s}$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}\Bigg|_{(\vec{q}, \hat{\dot{\vec{q}}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t)} \quad \forall i \in \hat{s}$$

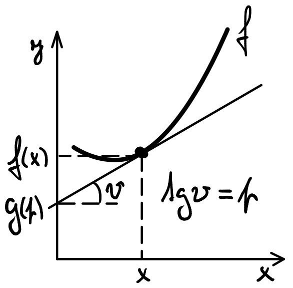
s ODR 2. řádu přechází na $2s$ ODR 1. řádu

Přejdeme pomocí fce. L od nezávislých proměnných $(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \underset{H}{\overset{L}{\rightleftarrows}} (\vec{q}, \vec{p}, t)$ k novým nezávislým proměnným a najdeme funkci H, která zprostředkuje přechod zpět a pomocí ní zapíšeme rovnice.

Legendreova duální transformace $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f=f(x)$ (konvexní) $f''(x)>0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} p \qquad \hat{p}=\frac{df}{dx}(x)=f'(x)$ — inverzní funkce — $\qquad df=\frac{df}{dx}dx=\hat{p}\,dx$

$p \xrightarrow{g} \pm x$ (TEF, TSFa) $\qquad \pm\hat{x}=\frac{dg}{dp}(p)=g'(p) \qquad g'(f'(x))=\pm x \qquad dg=\frac{dg}{dp}dp=\pm\hat{x}\,dp$ $\;\Big/\pm$



$f(x)=px+g(p)$

$[x, f(x)] \to [p, g(p)]$

$$d(f\pm g)=df\pm dg=p\,dx+x\,dp=d(px)\;\Rightarrow\; f\pm g=px+\underset{0}{\text{Konst.}}$$

$$g(p)=\pm\left(p\hat{x}(p)-\hat{f}(p)\right) \qquad \hat{f}(p)=f(\hat{x}(p))$$

$$f(x)=\pm\left(\hat{p}(x)x-\hat{g}(x)\right) \qquad \hat{g}(x)=g(\hat{p}(x))$$

dualita transformace $\quad x \xrightarrow{f} p \xrightarrow{g} x$, $\; f \leftrightarrow g$

Legendreova transformace Lagrangeovy funkce ⊕ $\quad f\to L \quad x\to\vec{\dot{q}} \quad \frac{d}{dx}\to\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i} \quad p\to\vec{p} \quad g\to H$

1) Obecná hybnost $\hat{p}_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}(\vec{q},\vec{\dot{q}},t)\Longrightarrow \dot{q}_i=\hat{\dot{q}}_i(\vec{q},\vec{p},t)$ $\quad$ lze pokud $\det\left(\frac{\partial\hat{p}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)=\underbrace{\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_i}\right)}_{\text{hessián}}\neq 0$

2) Hamiltonova funkce $H(\vec{q},\vec{p},t)=\sum_{j=1}^{\hat{s}}p_j\hat{\dot{q}}_j-\hat{L}=E(\vec{q},\vec{\hat{\dot{q}}}(\vec{q},\vec{p},t),t)$ $\quad$ kde $\hat{L}(\vec{q},\vec{p},t)=L(\vec{q},\vec{\hat{\dot{q}}}(\vec{q},\vec{p},t),t)$

obecná energie v proměnných $(\vec{q},\vec{p},t)$

3) Hamiltonovy kanonické rovnice (kanonický tvar LR2D)

I. sada $\quad \boxed{\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}}$ $\quad$ nemá dynamický obsah, je ekvivalentní definici obecné hybnosti

$$\dot{q}_i=\hat{\dot{q}}_i(\vec{q},\vec{p},t)=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \hat{H}(\vec{q},\vec{\dot{q}},t)=H(\vec{q},\vec{\hat{p}}(\vec{q},\vec{\dot{q}},t),t)=E(\vec{q},\vec{\dot{q}},t)$$

$\forall i\in\hat{s}$

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\hat{p}_j\dot{q}_j-\hat{H}\right)=\frac{\partial\hat{p}_j}{\partial q_i}\dot{q}_j-\frac{\partial\hat{H}}{\partial q_i}=\frac{\partial\hat{p}_j}{\partial q_i}\underbrace{\dot{q}_j}-\frac{\partial H}{\partial q_i}-\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}\frac{\partial\hat{p}_j}{\partial q_i}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

II. sada $\quad \boxed{\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}}$ $\quad$ má dynamický obsah, nahrazuje Newtonovy rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(p_j\hat{\dot{q}}_j-\hat{L}\right)=\underbrace{p_j}\frac{\partial\hat{\dot{q}}_j}{\partial t}-\frac{\partial L}{\partial t}-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}}\frac{\partial\hat{\dot{q}}_j}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}\bigg|_{\vec{\dot{q}}=\vec{\hat{\dot{q}}}(\vec{q},\vec{p},t)}}$$

Př. Nabitá částice v elektromagnetickém poli $\quad L=\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2-e\left(\varphi(\vec{x},t)-\dot{x}_iA_i(\vec{x},t)\right)$

obecná hybnost $\quad p_j=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}=\frac{1}{2}m\,2\dot{x}_i\delta_{ij}-e\left(-\delta_{ij}A_i\right)=m\dot{x}_j+eA_j \;\Rightarrow\; \dot{x}_j=\frac{p_j-eA_j}{m}$

obecná energie $\quad E=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_j}\dot{x}_j-L=(m\dot{x}_j+eA_j)\dot{x}_j-\left[\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2-e(\varphi-\dot{x}_iA_i)\right]=\frac{1}{2}m\dot{x}_j^2+e\varphi$

Hamiltonova funkce $\quad H=\frac{1}{2m}\left(p_j-eA_j\right)^2+e\varphi$

Pozn. obecná energie $\quad E=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-(T-U)=2T+0-T+U=T+U$

pokud T je homogenní stupně 2 v $\vec{\dot{q}}$; pokud U na $\vec{\dot{q}}$ nezávisí

Př. Konzervativní soustava $\quad$ konzervativní síly $F_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}$ $\quad U=U(\vec{x})$ $\quad$ a skleronomní vazby $f_k(\vec{x})=0 \;\; \forall k\in\hat{r}$

$$L=\sum_{i=1}^{3N}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2-U(\vec{x}) \qquad x_i=\hat{x}_i(\vec{q}) \qquad \dot{x}_i=\frac{d\hat{x}_i}{dt}=\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad \hat{U}(\vec{q})=U(\vec{\hat{x}}(\vec{q}))$$

$$\hat{L}(\vec{q},\vec{\dot{q}},t)=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{3N}m_i\left(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial q_k}\right)}_{T_{jk}(\vec{q})=T_{kj}(\vec{q})}\dot{q}_j\dot{q}_k-\hat{U}(\vec{q})=\frac{1}{2}T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k-\hat{U}(\vec{q})$$

obecná energie $\quad E=\frac{1}{2}T_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\hat{U}(\vec{q})$

$\mathbb{T}=\left(T_{kj}(\vec{q})\right)$ $\quad$ symetrická pozitivně definitní matice

obecná hybnost

$$p_i=\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{1}{2}T_{jk}\delta_{ji}\dot{q}_k+\frac{1}{2}T_{jk}\dot{q}_j\delta_{ki}=\frac{1}{2}\left(T_{ik}\dot{q}_k+T_{ji}\dot{q}_j\right)=T_{ik}\dot{q}_k \quad \Big/(\mathbb{T}^{-1})_{ji} \;\Rightarrow\; (\mathbb{T}^{-1})_{ji}p_i=(\mathbb{T}^{-1})_{ji}(\mathbb{T})_{ik}\dot{q}_k=\dot{q}_j$$

Hamiltonova funkce

$$H=\frac{1}{2}T_{jk}(\mathbb{T}^{-1})_{ji}(\mathbb{T}^{-1})_{kl}p_ip_l+\hat{U}(\vec{q})=\frac{1}{2}(\mathbb{T}^{-1})_{ji}\delta_{jl}p_ip_l+U(\vec{q})=\frac{1}{2}(\mathbb{T}^{-1})_{ij}p_ip_j+\hat{U}(\vec{q})$$