Řešení nehomogenních vlnových rovnic

Maxwellovy rovnice (v prostředí s konstantními $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$) jsou ekvivalentní nehomogenním vlnovým rovnicím pro potenciály doplněným o Lorenzovu kalibrační podmínku:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \qquad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

kde $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$. Vlnové rovnice nejsou provázané, lze je tedy řešit zvlášť.
Vzhledem k podobnému tvaru rovnic, stačí řešit rovnici pro φ.
Řešení nehomogenní rovnice se skládá z

- obecného řešení homogenní rovnice (PS=0) - superpozice již známých d'Alembertových řešení $\varphi(\vec{r}, t) = F(\vec{s}\cdot\vec{r} - vt)$ odpovídajících rovinným vlnám postupujícím ve směru $\vec{s}$
- partikulárního řešení nehomogenní rce. (PS≠0), které najdeme obdobně jako elektrostatický potenciál v elektrostatice, kde $\varphi = \varphi(\vec{r})$

Elektrostatika

Maxwelovy rovnice	$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$	$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$	Poissonova rovnice	$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$
	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$	$\frac{\rho}{\varepsilon} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$		

Poissonova rovnice má řešení $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V'$, které lze považovat za superpozici elementárních coulombovských potenciálů $\varphi(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{d}q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$
Elementární coulombovský potenciál určíme pro bodový náboj Q v počátku.
Řešení Poissonovy rovnice je jednoznačně určeno následujícími požadavky:

1. Laplaceova rovnice $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$ pro $\vec{r} \neq 0$
2. sférická symetrie (rovnice i okrajové podmínky jsou invariantní vůči rotacím) $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$
3. okrajová podmínka $\varphi(r) \to 0$ pro $r \to +\infty$
4. Gaussova věta $\int_V \operatorname{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$

Z 1) a 2) plyne $\quad 0 = \Delta\varphi(r) = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) \quad$ pro $r \neq 0$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \text{konst.} = -B \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = -\frac{B}{r^2} \qquad \boxed{\varphi(r) = \frac{B}{r} + A}$$

Konstanty A a B se určí z podmínek 3) a 4) $\quad 0 = \lim_{r\to+\infty}\varphi(r) = A$

$$\frac{Q}{\varepsilon} = \oint_{\partial V}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\oint_{\partial V}\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial V}\frac{B}{r^2}\underbrace{\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S}_{r^2\,\mathrm{d}\Omega} = B\int\mathrm{d}\Omega = B4\pi$$

Tedy $B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}$ a $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

Elektrodynamika

Elementární potenciál $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ splňující nehomogenní vlnovou rovnici pro časově proměnný bodový náboj v počátku $Q(t)$ musí splňovat podmínky

1. vlnová rovnice $\Delta\varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$ pro $\vec{r} \neq 0$
2. sférická symetrie $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(r, t)$
3. pro $v \to +\infty$ chceme $\varphi \to \varphi_\infty = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon r}$ (okamžitý coulombovský potenciál)
4. podmínka vyzařování $f_A = 0$ (podmínka kauzality)

Upravíme vzorec $\Delta\varphi(r, t) = \frac{1}{r}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)$

$$0 = \Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{r}{r}\varphi\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi)\right]$$

To je vlnová rovnice pro funkci $r\varphi(r, t)$ pro kterou existuje d'Alembertovo řešení $r\varphi(r, t) = f_R(t - \frac{r}{v}) + f_A(t + \frac{r}{v})$ (Retardovaný a Avansovaný potenciál)

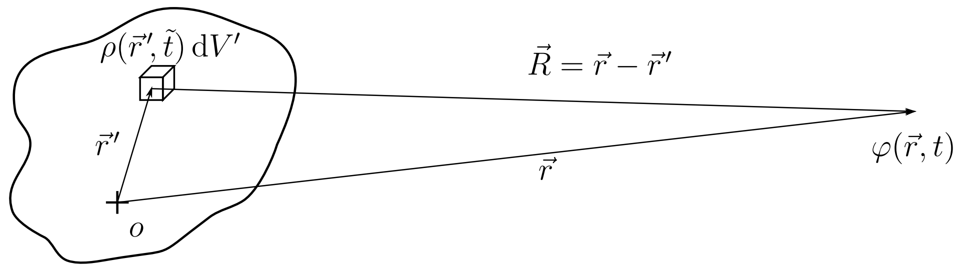
Avansovaný potenciál $\frac{1}{r}f_A$ vyloučíme kvůli podmínce kauzality. Retardovaný potenciál bodového náboje v počátku $\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r}Q(t - \frac{r}{v})$ získáme z podmínky 3). Potenciál v místě $\vec{r}$ v čase t odpovídá Coulombově potenciálu v témže místě v retardovaném čase $\tilde{t} = t - \frac{r}{v}$.

Pro náboj s hustotou $\rho(\vec{r}, t)$ v objemu V dostaneme superpozicí

obdobně získáme $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ze zadaných proudových hustot $\vec{j}(\vec{r}, t)$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V' \qquad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V'$$

Dosazením se lze přesvědčit, že odvozené potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku. To že vlnová rovnice má dva typy řešení (zpožděné a předbíhavé) souvisí s její symetrií vůči časové inverzi ($t \to -t$), okrajové podmínky, ale takovou symetrii nemají. Zdroj tedy budí EM vlnu, která se šíří od něj jako rozbíhavá vlna k pozorovateli a odnáší sebou energii. Předbíhavá vlna odporuje kauzalitě.



Dipólová aproximace retardovaných potenciálů

Předpokládejme, že elektromagnetické pole je buzeno prostorově ohraničenou soustavou nábojů, tj. že ρ a $\vec{j}$ jsou nenulové pouze uvnitř koule V poloměru a. V dostatečné vzdálenosti od tohoto zdroje nahradíme funkce φ a $\vec{A}$ nejnižšími členy jejich multipólových rozvojů. Počátek soustavy souřadnic umístíme do středu koule. Integrand $f(\vec{r}', |\vec{r}-\vec{r}'|) = \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ je funkce dvou nezávislých proměnných $\vec{r}'$ a $\vec{r}$ od kterých přejdeme k $\vec{r}$ a $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ a uděláme Taylorův rozvoj v $\vec{R}$ do 1. řádu kolem hodnoty $\vec{r}$

$$f(\vec{r}', R) \doteq f(\vec{r}', R)|_{\vec{R}=\vec{r}} + (\vec{R}-\vec{r}) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{R}}\right|_{\vec{R}=\vec{r}} =$$

$$= f(\vec{r}', r) + (-\vec{r}') \cdot \left[\frac{\partial f(\vec{r}', R)}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial \vec{R}}\right]_{\vec{R}=\vec{r}} = f(\vec{r}', r) - \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial f(\vec{r}', r)}{\partial r}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) \doteq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{r}\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})}{r}\right)\mathrm{d}V' =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\underbrace{\int_V \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})\,\mathrm{d}V'}_{Q(\tilde{t})=0 \text{ nebo konst.}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\int_V \vec{r}'\rho(\vec{r}', t - \frac{r}{v})\,\mathrm{d}V'}_{\vec{p}(\tilde{t})}\right)$$

Retardovaný potenciál buzený časově proměnným dipólem $\vec{p}(t)$ umístěným v počátku

$$\boxed{\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right)}$$

lze upravit pomocí $\mathrm{div}\,\vec{F}(r) = \frac{\partial F_i(r)}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}r} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial r}$.

Lorenzova podmínka $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ pak dává

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right)\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right)}$$

S využitím rovnice kontinuity, identity $\mathrm{div}(f\vec{F}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{F} + \vec{F} \cdot \mathrm{grad}\, f$ a skutečnosti, že hranicí koule nic neprotéká (tj. $\vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}' = 0$ na ∂V) dostaneme

$$\frac{\partial p_k(\tilde{t})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V x'_k \rho(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' = \int_V x'_k \frac{\partial \rho(\vec{r}', \tilde{t})}{\partial t}\,\mathrm{d}V' = -\int_V x'_k\,\mathrm{div}'\,\vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' =$$

$$= -\int_V \mathrm{div}'\left(x'_k \vec{j}(\vec{r}', \tilde{t})\right) - \vec{j}(\vec{r}', \tilde{t}) \cdot \mathrm{grad}'(x'_k)\,\mathrm{d}V' =$$

$$= -\oint_{\partial V} x'_k \vec{j}(\vec{r}', \tilde{t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}' + \int_V j_k(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V' = \int_V j_k(\vec{r}', \tilde{t})\,\mathrm{d}V'$$

Získaný vektorový potenciál je buzen polarizačním proudem kompenzujícím časové změny rozložení náboje v dipólu a odpovídá nultému členu multipólového rozvoje rozvoje

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} = \frac{\mu}{4\pi r}\int_V \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{v}\right)\mathrm{d}V'}$$

kde $\dot{\vec{p}}$ značí derivaci funkce $\vec{p}$ vzhledem k její jediné proměnné

Záření dipólu

Označíme $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ a určíme pole $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ a $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$B_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\mu}{4\pi}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\dot{p}_k(t - \frac{r}{v})}{r}\right) = \frac{\mu}{4\pi}\epsilon_{ijk}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{x_j}{r}\dot{p}_k + \frac{1}{r}\ddot{p}_k\left(-\frac{x_j}{vr}\right)\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{\vec{r} \times \dot{\vec{p}}}{r^3} + \frac{\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} = -\frac{\mu}{4\pi}\left.\left(\frac{\vec{n} \times \dot{\vec{p}}}{r^2} + \frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}}{vr}\right)\right|_{t-\frac{r}{v}}}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\vec{p}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r}\left[-\frac{1}{r^2}\vec{p} + \frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(-\frac{1}{v}\right)\right]_{t-\frac{r}{v}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{x_j p_j}{r^3} + \frac{x_j \dot{p}_j}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\delta_{ij}p_j}{r^3} + \frac{x_j \dot{p}_j}{r^3}\left(-\frac{x_i}{vr}\right) - \frac{3}{r^4}\frac{x_i}{r}x_j p_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{ij}\dot{p}_j}{vr^2} + \frac{x_j \ddot{p}_j}{vr^2}\left(-\frac{x_i}{vr}\right) - \frac{2}{vr^3}\frac{x_i}{r}x_j \dot{p}_j\right]_{t-\frac{r}{v}} - \left.\frac{\mu}{4\pi}\frac{\ddot{p}_i}{r}\right|_{t-\frac{r}{v}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{3x_i(x_j p_j) - p_i r^2}{r^5} + \frac{3x_i(x_j \dot{p}_j) - \dot{p}_i r^2}{vr^4} + \frac{x_i(x_j \ddot{p}_j) - \ddot{p}_i r^2}{v^2 r^3}\right]_{t-\frac{r}{v}}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left.\left(\frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3} + \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}) - \dot{\vec{p}}}{vr^2} + \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}}{v^2 r}\right)\right|_{t-\frac{r}{v}}}$$

Statická zóna

Je oblast v blízkosti zdroje (pro malá r lze položit $t \doteq t - \frac{r}{v}$) ve které převládají členy

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{p}(t)) - \vec{p}(t)}{4\pi\varepsilon r^3} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{n}\times\dot{\vec{p}}(t)}{r^2}$$

odpovídající elektrostatickému poli dipólu $\vec{p}$ (až na časovou závislost) a Biotově–Savartově zákonu pro magnetické pole buzené polarizačním proudem $\dot{\vec{p}}$

Vlnová zóna

Je oblast dostatečně vzdálená od zdroje ($r >> a$ a současně $r >> \lambda_{dom.}$) ve které převládají členy úměrné $\frac{1}{r}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \left.\frac{\vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon v^2 r}\right|_{t-\frac{r}{v}} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu}{4\pi}\left.\frac{\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{vr}\right|_{t-\frac{r}{v}}$$

Toto EM pole představuje sférickou vlnu (plochy konstantní fáze $t - \frac{r}{v} = konst.$ jsou sféry) šířící se rychlostí v. Vzhledem k tomu, že platí

$$\vec{n}\cdot\vec{E} = 0 = \vec{n}\cdot\vec{B} \qquad \text{a} \qquad \vec{n}\times\vec{E} = -\frac{\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{4\pi\varepsilon v^2 r} = -\frac{\mu\vec{n}\times\ddot{\vec{p}}}{4\pi r} = v\vec{B},$$

tvoří $\vec{n}, \vec{E}, \vec{B}$ pravotočivou soustavu a $E = vB$. Vlna má tedy podobné vlastnosti jako rovinná vlna šířící se ve směru $\vec{n}$ a lze ji tedy v dostatečné vzdálenosti od zdroje rovinou vlnou aproximovat (nahradit malý úsek plochy konstantní fáze úsekem rovinné vlny šířící se ve směru $\vec{n}$).

Polarizace vlny je dána průmětem $\ddot{\vec{p}}_\perp$ vektoru $\ddot{\vec{p}}$ do směru kolmého k $\vec{n}$
$\ddot{\vec{p}} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}) + \ddot{\vec{p}}_\perp$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon v^2 r}$$

Pro magnetické pole platí

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{Z}\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

kde $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ je charakteristická impedance (pro vakuum $Z_0 = 377\Omega$).

Hustota toku energie ve vlnové zóně je dána Poyntingovým vektorem

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{Z}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{1}{Z}\vec{E}^2\vec{n} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2 v^4 Z}\left(\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)^2\frac{\vec{n}}{r^2}$$

Pro dipól $\vec{p}(t) = \vec{p}_0\cos(\omega t)$

máme $\ddot{\vec{p}} = -\omega^2\vec{p}_0\cos(\omega t)$

Označme úhel mezi konstantním vektorem $\vec{p}_0$ a směrem $\vec{n}$ jako θ pak

$(\ddot{\vec{p}}_\perp)^2 = (\ddot{\vec{p}} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}}))^2 = \ddot{\vec{p}}^2 - 2(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}})^2 + (\vec{n}\cdot\ddot{\vec{p}})^2 = \omega^4 p_0^2(1-\cos^2\theta)\cos^2(\omega t)$

$\left(\ddot{\vec{p}}_\perp\left(t - \frac{r}{v}\right)\right)^2 = \omega^4 p_0^2\sin^2\theta\cos^2\left(\omega t - \omega\frac{r}{v}\right) = \omega^4 p_0^2\sin^2\theta\cos^2(\omega t - kr)$

kde $k = \frac{\omega}{v}$ je vlnové číslo.

Hustota toku energie v místě $\vec{r}$ a čase t lze s využitím $\varepsilon Z = \frac{1}{v}$ a $\omega = kv$ zapsat jako

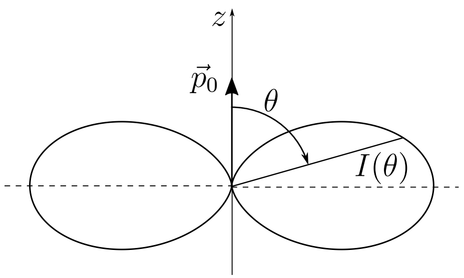
$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t) = \vec{n}\frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2\varepsilon^2 v^4 Z}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cos^2(\omega t - kr) = \vec{n}\frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cos^2(\omega t - kr)$$

Okamžitý vyzářený výkon – energie vyzářená za jednotku času přes sféru S_r velkého poloměru r

$$\begin{aligned} W(t) &= \oint_{S_r}\vec{\mathcal{S}}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\vec{\mathcal{S}}\cdot\vec{n}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\theta}{r^2}r^2\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)2\pi\int_0^\pi\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr)2\pi\frac{4}{3} = \\ &= \frac{8\pi}{3}\frac{vk^4p_0^2}{16\pi^2\varepsilon}\cos^2(\omega t - kr) \end{aligned}$$

Časová střední hodnota vyzářeného výkonu

$$\langle W(t)\rangle_T = \frac{vk^4p_0^2}{12\pi\varepsilon}$$



Intenzita záření

$$I = \langle|\vec{\mathcal{S}}|\rangle_T = \frac{vk^4p_0^2}{32\pi^2\varepsilon}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

Maximální intenzita je ve směru kolmém k dipólovému momentu $\vec{p}_0$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Ve směru dipólového momentu ($\theta = 0$) dipól nevyzařuje.