Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavy)

• soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy $C^{(2)}$)

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k \in \hat{\pi}\} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$$

dimenze $M(t)$ = dimenze tečného prostoru k $M(t)$

Vazby jsou <u>nezávislé</u>, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_\pi)$ $\forall \vec{x} \in M(t)$, $\forall t$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby $\underbrace{f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k \in \hat{\pi}}_{\text{"obecné rovnice" konf. prostoru}}$ nezávislé a platí $\dim M(t) = 3N - \pi = s$ (počet stupňů volnosti).

Jsou-li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbylých π nezávislých vazbeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnost matice

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\pi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\pi}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(t) \ \forall t.$$

Obecné (zobecněné) souřadnice q_j $j \in \hat{s}$ vhodně zvolené parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$$\vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q},t) \qquad \hat{\vec{x}} : \mathbb{R}^{s+1} \to \mathbb{R}^{3N}$$

$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_s, t)$ $i \in \widehat{3N}$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h\left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\right) = s$

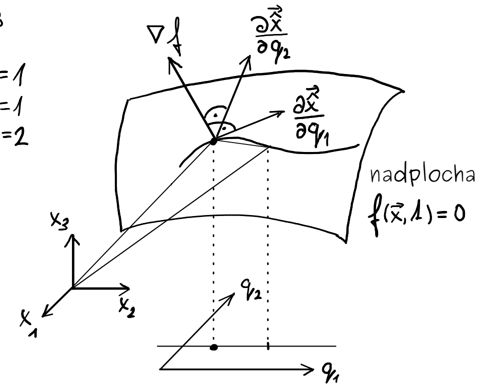
funkce třídy $C^{(2)}$ zvolené tak, aby splnily vazby:

$$\hat{f}_k(\vec{q},t) = f_k(\hat{\vec{x}}(\vec{q},t),t) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \ \forall t \quad \forall k \in \hat{\pi}$$

$$0 = \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\nabla f_k}_{\text{normálový vektor k nadploše } f_k(\vec{x},t)=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\vec{x}}}{\partial q_j}}_{\text{tečný vektor k j-té souřadnicové křivce ležící v nadploše}}$$

skalární součin

Př. $\mathbb{R}^3$
$N=1$
$\pi=1$
$s=2$



Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}) \quad \forall i \in \widehat{3N}$

Př. 1) jeden bod v $\mathbb{R}^3$

$f(\vec{x},t) = x_1 + x_2 + x_3 - ct = 0$

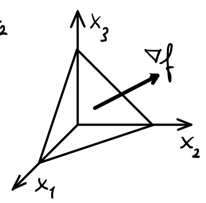
M = rovina s normálou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

obecné souřadnice q_1, q_2

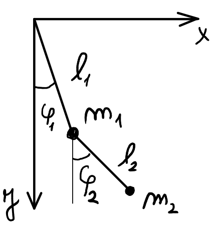
$x_1 = q_1$

$x_2 = q_2$

$x_3 = ct - q_1 - q_2$



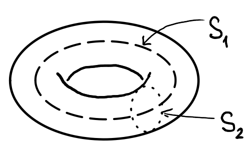
2) dvojité matematické kyvadlo v rovině



$f_1(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$

$f_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$

$M = T^2 = S_1 \times S_2$ torus



obecné souřadnice φ_1, φ_2

$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$

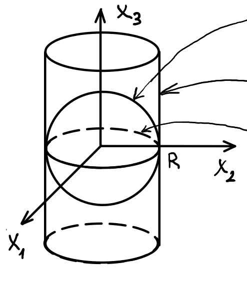
$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$

$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$

$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2) \\ 2(y_1 - y_2) \\ 2(x_2 - x_1) \\ 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix}$$

3) bod na povrchu koule a válece



$f_1(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$

$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$

M = kružnice s osou z a středem v počátku $\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LZ pro $x_3 = 0$

popíšeme M pomocí funkcí s LN gradienty

$f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x}) = x_3^2 = 0 \iff \tilde{f}_1(\vec{x}) = x_3 = 0$ $\quad \nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ jsou LN na M

Lagrangeovy rovnice 1. druhu převedeme do obecných souřadnic $\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \widehat{3N} \qquad f_k(\vec x, t)=0 \quad \forall k\in\hat r$

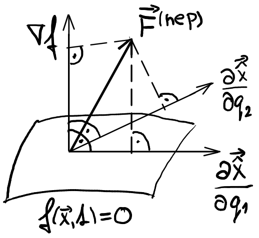
$x_i = \hat x_i(\vec q, t) \quad \forall i\in\widehat{3N}$ tím splníme r vazebných podmínek $\hat f_k(\vec q,t) = f_k(\vec x(\vec q,t),t) \equiv 0 \quad \forall k\in\hat r\ \forall \vec q\ \forall t$

Zbylých 3N diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí $\mathbb{S}^T$

kde $\mathbb S = \left(\underbrace{\frac{\partial\vec x}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial \vec x}{\partial q_s}}, \underbrace{\nabla f_1,\dots,\nabla f_r}\right)$ je regulární matice řádu $3N\times 3N$

báze tečného a normálového prostoru k $M(t)$

Př. $\mathbb R^3$



$$(1) \quad \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \underbrace{\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^r \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}}_{\nabla f_k\cdot \frac{\partial\vec x}{\partial q_j}=0}$$

prvních s rovnic $\forall j\in\hat s \quad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$

$$(2) \quad \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^r\lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial f_l}{\partial x_i}}_{\nabla f_k\cdot\nabla f_l = G_{kl}}$$

dalších r rovnic $\forall l\in\hat r \quad \Big/\sum_{i=1}^{3N} \quad \Big/\cdot(\mathbb G^{-1})_{lm}$

prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1,\dots,\nabla f_r)$

$\det \mathbb G = \det(G_{kl}) \neq 0 \Leftrightarrow$ je LN soubor

$$(\mathbb G^{-1})_{lm}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}F_i^{(nep)}\right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k G_{kl}(\mathbb G^{-1})_{lm} = \sum_{k=1}^r\lambda_k\delta_{km} = \lambda_m \quad \forall m\in\hat r \quad \Big/\sum_{i=1}^{3N}$$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} = \frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot q_k} \qquad \frac{\partial \dot q_j}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial q_k}{\partial \dot q_j} \qquad x_i = \hat x_i(\vec q,t) \qquad \dot x_i = \dot{\hat x}_i = \frac{\hat d \hat x_i}{dt} = \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \hat x_i}{\partial t} \qquad \dot x_i = \dot{\hat x}_i(\vec q,\dot{\vec q},t)$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $\frac{\partial \hat x_i}{\partial \dot q_j} = 0$ 2) $\frac{\partial \dot{\hat x}_i}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot q_k} + 0 = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\delta_{jk} = \frac{\partial \hat x_i}{\partial q_k}$ "pravidlo krácení teček"

3) $\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2\hat x_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot q_k + \frac{\partial^2 \hat x_i}{\partial t\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial \hat x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\hat d\hat x_i}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\hat x}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\left[\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\right)\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j} = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial \hat x_i}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\frac{\partial\dot{\hat x}_i}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial\dot x_i}\frac{\partial \dot{\hat x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j} = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot q_j}\right) - \frac{\partial \hat L}{\partial q_j}$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$$\boxed{\frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial \hat L}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j\in\hat s}$$

- neobsahují vazbové síly
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot q_i, \ddot q_i$ dosazením $q_i = \tilde q_i(t)$, $\dot q_i = \dot{\tilde q}_i(t)$, $\ddot q_i = \ddot{\tilde q}_i(t)$ dostaneme obyčejné difr. 2. řádu

Obecná nepotenciální síla

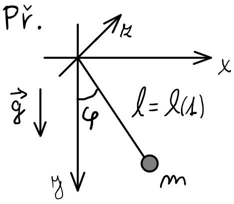
$$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial\hat x_i}{\partial q_j}F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v obecných) - není určena jednoznačně

$\hat L(\vec q,\dot{\vec q},t) = L(\vec x(\vec q,t), \dot{\vec x}(\vec q,\dot{\vec q},t),t) \qquad \hat L' = \hat L + \frac{\hat d}{dt}h(\vec q,t)$

při $Q_j^{(nep)}=0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálníma vazbama

Př.



vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x,y) = x^2+y^2-l^2(t) = 0$

$\boxed{s = 3-2 = 1}$

obecné souřadnice φ

$x = l(t)\sin\varphi$

$y = l(t)\cos\varphi$

$z = 0$

$L = \frac12 m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) + mgy$

$\hat L = \frac12 m(\dot l^2(t) + l^2(t)\dot\varphi^2) + mgl(t)\cos\varphi$

LR2.D $0 = \frac{\hat d}{dt}\left(\frac{\partial\hat L}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial\hat L}{\partial\varphi} = \frac{\hat d}{dt}(ml^2(t)\dot\varphi) - (-mgl(t)\sin\varphi) = 2ml(t)\dot l(t)\dot\varphi + ml^2(t)\ddot\varphi + mgl(t)\sin\varphi$