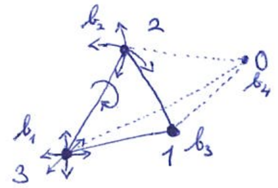
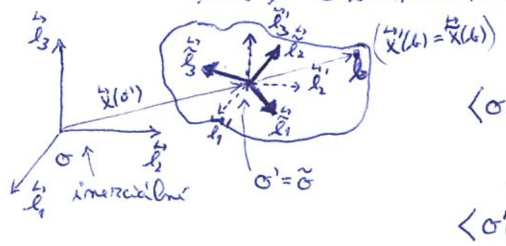
Mechanika tuhého tělesa



Tuhé těleso - model reálného tělesa, který nepodléhá deformacím
- aproximujeme soustavou hm. bodů o neměnných vzdálenostech
- má $s=6$ stupňů volnosti (3 translační + 3 rotační)

Vazby $|\vec{b}_\alpha - \vec{b}_\beta| = |\vec{r}_{\alpha\beta}| = konst$



$\langle O, B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\rangle$ ... inerciální vztažná soustava (laboratorní)

$\downarrow \quad O'(t) = O + \vec{R} \qquad \vec{e}'_i = \vec{e}_i \qquad \vec{X}'(b) = \vec{X}(b) - \vec{X}(O')$

$\langle O'(t), B' \equiv B\rangle$ ... soustava hmotného středu (těžišťová)

$\downarrow \quad \tilde O(t) = O'(t) \qquad \tilde{\vec e}_i(t) = \vec e_j S_{ji}(t),\ \mathbb{S}\in SO(3) \qquad \tilde{\vec X}(b) = \mathbb{S}^T \vec X'(b)$

$\langle \tilde O(t)\equiv O'(t), \tilde B = (\tilde{\vec e}_1,\tilde{\vec e}_2,\tilde{\vec e}_3)\rangle$ ... soustava spojená s tělesem (tělesová)

$\tilde{\vec X}(b_\alpha) = \tilde{\vec X}_\alpha = \mathbb{S}^T(\vec X_\alpha - \vec X(\tilde O))$

$\vec X_\alpha = \mathbb{S}\tilde{\vec X}_\alpha + \vec X(\tilde O) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$

$$\dot{\vec X}_\alpha = \dot{\mathbb S}\tilde{\vec X}_\alpha + \mathbb S \underset{0}{\dot{\tilde{\vec X}}_\alpha} + \dot{\vec X}(\tilde O) = \dot{\mathbb S}\mathbb S^T \vec X'_\alpha + \dot{\vec X}(\tilde O) = \underbrace{\underbrace{\dot{\mathbb S}\mathbb S^T}_{-\omega}(\vec X_\alpha - \vec X(\tilde O))}_{\dot{\vec X}'_\alpha} + \underset{\dot{\vec X}(O')}{\dot{\vec X}(\tilde O)}$$

$\dot{\tilde{\vec X}}_\alpha = 0$ ... body tělesa jsou v $\langle \tilde O, \tilde B\rangle$ v klidu

$\dot{\vec X}'_\alpha$ ... rychlost v $\langle O', B'\rangle$

Tenzor ω $\quad \mathbb S\mathbb S^T = \mathbb 1 \Rightarrow \dot{\mathbb S}\mathbb S^T + \mathbb S\dot{\mathbb S}^T = 0 \Rightarrow \dot{\mathbb S}\mathbb S^T = -\mathbb S\dot{\mathbb S}^T$

$\omega^T = (-\dot{\mathbb S}\mathbb S^T)^T = -\mathbb S\dot{\mathbb S}^T = \dot{\mathbb S}\mathbb S^T = -\omega$

je antisymetrický

chceme: $-\omega \vec X'_\alpha = \dot{\mathbb S}\mathbb S^T \vec X'_\alpha = \vec\Omega\times\vec X'_\alpha$

$-\omega_{ik}X'_{\alpha k} = \varepsilon_{ijk}\Omega_j X'_{\alpha k} \quad \forall \vec X'_\alpha$

$-\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk}\Omega_j \quad / \cdot \varepsilon_{ilk}$

$$\boxed{\Omega_l = \frac12 \varepsilon_{lik}\omega_{ik} = -\frac12\varepsilon_{lik}(\dot{\mathbb S}\mathbb S^T)_{ik}} \quad \Leftarrow \quad \varepsilon_{lik}\omega_{ik} = -\varepsilon_{ilk}\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilk}\Omega_j = 2\delta_{jl}\Omega_j = 2\Omega_l$$

↑ složky úhlové rychlosti rotace tělesa (soustavy $\langle \tilde O, \tilde B\rangle$) vůči inerciální soustavě $\langle O, B\rangle$ v bázi B

Pozn $\omega \equiv \omega'$ a $\vec\Omega \equiv \vec\Omega'$ $\qquad$ dříve $\tilde\Omega_i = -\frac12\varepsilon_{ijk}(\mathbb S^T\dot{\mathbb S})_{jk}$ ... složky téhož vektoru $\vec\Omega$ v bázi $\tilde B$

$\dot{\vec X}_\alpha = \vec\Omega\times(\vec X_\alpha - \vec X(\tilde O)) + \dot{\vec X}(\tilde O) = \vec\Omega\times\vec X'_\alpha + \dot{\vec X}(O') \quad \forall\alpha\in\hat N$ ... pohyb bodu b_α tělesa je popsán jako složení translace počátku $\tilde O \equiv O'$ a rotace kolem tohoto počátku

$\Rightarrow$ úhlová rychlost $\vec\Omega$ - nezávisí na volbě počátku
- je stejná pro všechny body tělesa

Kinetická energie tuhého tělesa

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac12 m_\alpha \dot{\vec X}_\alpha^2 = \sum_\alpha{}' \frac12 m_\alpha(\vec\Omega\times\vec X'_\alpha + \dot{\vec X}(O'))^2 = \sum_\alpha{}' \frac12 m_\alpha \dot{\vec X}(O')^2 + \sum_\alpha{}' m_\alpha(\vec\Omega\times\vec X'_\alpha)\cdot\dot{\vec X}(O') + \frac12\sum_\alpha{}' m_\alpha(\vec\Omega\times\vec X'_\alpha)^2 =$$

$$= \frac12\underbrace{\Big(\sum_\alpha{}' m_\alpha\Big)}_{M}\dot{\vec X}(O')^2 + \Big(\vec\Omega\times\underbrace{\Big(\sum_\alpha{}' m_\alpha\vec X'_\alpha\Big)}_{M\vec R'}\Big)\cdot \dot{\vec X}(O') + \frac12\sum_\alpha m_\alpha(\vec\Omega\times\vec X'_\alpha)^2 = \frac12 M\dot{\vec X}(O')^2 + M(\vec\Omega\times\vec R')\cdot\dot{\vec X}(O') + \frac12\tilde I_{jk}\tilde\Omega_j\tilde\Omega_k$$

člen $\sum_\alpha{}' m_\alpha(\vec\Omega\times\vec X'_\alpha)^2 = \sum_\alpha{}' m_\alpha(\mathbb S\tilde{\vec\Omega}\times\mathbb S\tilde{\vec X}_\alpha)^2 \overset{\mathbb S\in SO(3)}{=} \sum_\alpha{}' m_\alpha(\mathbb S(\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec X}_\alpha))^2 = \sum_\alpha{}' m_\alpha(\tilde{\vec\Omega}\times\tilde{\vec X}_\alpha)^2 = \sum_\alpha{}' m_\alpha \varepsilon_{kij}\tilde\Omega_i\tilde X_{\alpha j}\varepsilon_{klm}\tilde\Omega_l\tilde X_{\alpha m}$

$$= \sum_\alpha{}' m_\alpha(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\tilde\Omega_i\tilde\Omega_l\tilde X_{\alpha j}\tilde X_{\alpha m} = \underbrace{\Big[\sum_\alpha{}' m_\alpha(\delta_{il}\tilde X_{\alpha j}^2 - \tilde X_{\alpha i}\tilde X_{\alpha l})\Big]}\tilde\Omega_i\tilde\Omega_l = \tilde I_{il}\tilde\Omega_i\tilde\Omega_l$$

$\tilde I_{il}$ ... moment setrvačnosti tělesa v soustavě $\langle \tilde O, \tilde B\rangle$ tělesové - tenzor

$T = \frac12 M\dot{\vec X}(O')^2 + M(\vec\Omega\times\underset{0}{\vec R'})\cdot\dot{\vec X}(O') + \frac12\tilde{\vec\Omega}^T\tilde{\mathbb I}\tilde{\vec\Omega}$

$\vec R' = 0$ ... v soustavě hmotného středu

Věta Buď $\tilde O \equiv O'$ hmotný střed tuhého tělesa tak $T = \underbrace{\frac12 M\dot{\vec R}^2}_{\text{energie translace těžiště}} + \underbrace{\frac12\tilde I_{jk}\tilde\Omega_j\tilde\Omega_k}_{\text{energie rotace vůči ose jdoucí těžištěm (kinetická energie } T' \text{ v těžišťové soustavě)}}$

Tensor momentu setrvačnosti $I_{jk} = \sum_\alpha m_\alpha (\delta_{jk} x_{\alpha l} x_{\alpha l} - x_{\alpha j} x_{\alpha k})$ $\quad \mathbb{I} = \sum_\alpha m_\alpha (\vec{x}_\alpha^2 \mathbb{1} - \underbrace{\vec{x}_\alpha \vec{x}_\alpha^T}_{\vec{x}_\alpha \otimes \vec{x}_\alpha})$

tenzorový součin

pro spojité rozložení hmoty $\quad I_{jk} = \int_V \rho(\vec{x})(\delta_{jk}\vec{x}^2 - x_j x_k)\, dV$

Pozn. $\tilde{I}_{jk} = I'_{il}(t) S_{ij}(t) S_{lk}(t)$ $\quad \tilde{\mathbb{I}} = \mathbb{S}^T(t)\,\mathbb{I}'(t)\,\mathbb{S}(t)$ v soustavě spojené s tělesem nezávisí na čase!

$\mathbb{I}'(t) = \mathbb{S}(t)\,\tilde{\mathbb{I}}\,\mathbb{S}(t)^T$ v těžišťové soustavě závisí jeho složky na čase

transformace $I \leftrightarrow I'$ mezi inerciální a těžišťovou soustavou vede na Steinerovu větu.

Pohyb tuhého tělesa = translační pohyb jeho těžiště ($\langle o, B\rangle \to \langle o'(t), B\rangle$) složený s rotačním pohybem vůči těžišti ($\langle o', B\rangle \to \langle o', \tilde{B}(t)\rangle$) $\Rightarrow$ neznámé $\vec{R}(t)$, $\mathbb{S}(t)$

1. Věta impulsová $\quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)} \quad \vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}}$

v inerciální soustavě

2. Věta impulsová $\quad \dot{\vec{L}}' = \vec{N}'^{(e)}$ $\quad$ převedeme ji do soustavy $\langle \tilde{o}, \tilde{B}\rangle$ tělesové

v soustavě hm. středu

$$(\dot{\vec L}')_i = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec x'_\alpha \times \dot{\vec x}'_\alpha\Big)_i = \Big(\sum_\alpha m_\alpha \vec x'_\alpha \times (\vec\Omega \times \vec x'_\alpha)\Big)_i = \sum_\alpha m_\alpha x'_{\alpha j}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,\Omega_l\, x'_{\alpha m} =$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, x'_{\alpha j} x'_{\alpha m}\,\Omega_l = \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha(\delta_{il}\, x'_{\alpha j}x'_{\alpha j} - x'_{\alpha l}x'_{\alpha i})}_{I'_{il}}\,\Omega_l = I'_{il}\,\Omega_l = (\mathbb{I}'\vec\Omega)_i$$

$$\vec L' = \mathbb I'\vec\Omega = \mathbb S\,\tilde{\mathbb I}\underbrace{\mathbb S^T\mathbb S}_{\mathbb 1}\tilde{\vec\Omega} = \mathbb S\, \underbrace{\tilde{\mathbb I}\,\tilde{\vec\Omega}}_{(\vec L')_{\tilde B}}$$

$(\vec L')_{\tilde B}$ ... pozor nejde o $\tilde{L}$, ve soustavě $\langle \tilde o, \tilde B\rangle$ tělesové je moment hybnosti nulový $\tilde{L} = 0$

$$\dot{\vec L}' = (\mathbb S\tilde{\mathbb I}\tilde{\vec\Omega})^\cdot = \dot{\mathbb S}\,\tilde{\mathbb I}\,\tilde{\vec\Omega} + \mathbb S\,\underbrace{\dot{\tilde{\mathbb I}}}_{0}\,\tilde{\vec\Omega} + \mathbb S\,\tilde{\mathbb I}\,\dot{\tilde{\vec\Omega}} \overset{2.V.I.}{=} \vec N'^{(e)} = \sum_\alpha \vec x'_\alpha\times\vec F'^{(e)}_\alpha = \sum_\alpha(\mathbb S\tilde{\vec x}_\alpha)\times(\mathbb S\tilde{\vec F}^{(e)}_\alpha) = \mathbb S\Big(\sum\tilde{\vec x}_\alpha\times\tilde{\vec F}^{(e)}_\alpha\Big) = \mathbb S\tilde{\vec N}^{(e)} \quad /\cdot\mathbb S^T$$

$$\underbrace{\mathbb S^T\dot{\mathbb S}}_{\tilde{\vec\Omega}\times = -\tilde\omega \ldots}\tilde{\mathbb I}\,\tilde{\vec\Omega} + \underbrace{\mathbb S^T\mathbb S}_{\mathbb 1}\tilde{\mathbb I}\,\dot{\tilde{\vec\Omega}} = \underbrace{\mathbb S^T\mathbb S}_{\mathbb 1}\tilde{\vec N}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{\vec\Omega}\times(\tilde{\mathbb I}\,\tilde{\vec\Omega}) + \tilde{\mathbb I}\,\dot{\tilde{\vec\Omega}} = \tilde{\vec N}^{(e)}}$$

Eulerovy setrvačníkové rovnice $\quad \boxed{\varepsilon_{ijk}\,\tilde\Omega_j\,\tilde I_{kl}\,\tilde\Omega_l + \tilde I_{ij}\,\dot{\tilde\Omega}_j = \tilde N_i^{(e)} \quad \forall i=1,2,3}$

Tensor momentu setrvačnosti je symetrický $\tilde I_{jk} = \tilde I_{kj}$ $\Rightarrow$ je diagonalizovatelný v O.N. bázi (hlavní bázi) osy odpovídající vektorům této báze se nazývají hlavní osy setrvačnosti

je-li $\tilde B$ hlavní bází pro $\tilde I$ tak $\quad \tilde{\mathbb I} = \begin{pmatrix} \tilde I_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde I_3 \end{pmatrix}$

hlavní momenty setrvačnosti

Eulerovy setrvačníkové rovnice v hlavních osách setrvačnosti $\quad \boxed{\varepsilon_{ijk}\,\tilde\Omega_j\,\tilde I_k\,\tilde\Omega_k + \tilde I_i\,\dot{\tilde\Omega}_i = \tilde N_i^{(e)} \quad \forall i=1,2,3}$ $\quad$ běžně se píše bez vlnek

bez sumace přes i

pro $\tilde N^{(e)}=0$ jsou diferenciální rce. 1. řádu pro neznámé $\tilde\Omega_i(t)$ po jejich vyřešení zbývá vyřešit rce 1. řádu pro neznámé funkce $S_{ij}(t)$ $\quad \tilde\Omega_i(t) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\mathbb S^T\dot{\mathbb S})_{jk}$

pro $\tilde N^{(e)}\neq 0$ jde o difr. 2. řádu pro neznámé $S_{ij}(t)$ neboť $\tilde N^{(e)} = \mathbb S^T \vec N^{(e)}$

Setrvačníky

- volný (bezmomentový $\vec{N}^{(e)}=0$) - řešitelný analyticky
- těžký ($\vec{N}^{(e)}\neq 0$) - řešitelné případy
  - vyvážený setrvačník s nehybným těžištěm (Euler)
  - symetrický setrvačník s pevným bodem na hlavní ose rotace $\tilde{z}$ nad těžištěm (Lagrange)
  - symetrický setrvačník ($\tilde{I}_1=\tilde{I}_2=2\tilde{I}_3$) s pevným bodem v rovině $\tilde{x},\tilde{y}$ (Kovalevská)

Setrvačník
- asymetrický $\tilde{I}_1\neq\tilde{I}_2\neq\tilde{I}_3\neq\tilde{I}_1$
- symetrický $\tilde{I}_1=\tilde{I}_2\neq\tilde{I}_3$
- kulový (sférický) $\tilde{I}_1=\tilde{I}_2=\tilde{I}_3$
- rotátor ($\tilde{I}_1=\tilde{I}_2,\ \tilde{I}_3=0$) 

1. **Volný sférický setrvačník** $\tilde{I}_1=\tilde{I}_2=\tilde{I}_3$, $\vec{N}^{(e)}=0$ Euler. rce. $\tilde{I}_j\dot{\tilde{\Omega}}_j=0\quad\forall j=1,2,3 \Rightarrow \vec{\tilde{\Omega}}(t)=\text{konst.}$

2. **Volný symetrický setrvačník** $\tilde{I}_1=\tilde{I}_2\neq\tilde{I}_3$, $\vec{N}^{(e)}=0$

$\varepsilon_{ijk}I_k\Omega_j\Omega_k+I_i\dot{\Omega}_i=N_i^{(e)}\quad\forall i=1,2,3$

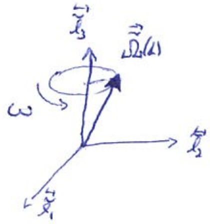
$$I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-\underset{=I_1}{I_2})\Omega_2\Omega_3=0\quad\Big/\frac{d}{dt}\qquad I_1\ddot{\Omega}_1+(I_3-I_1)\dot{\Omega}_2\Omega_3=0$$
$$I_2\dot{\Omega}_2+(I_1-I_3)\Omega_1\Omega_3=0\ \Rightarrow\ \dot{\Omega}_2=\frac{(I_3-I_1)}{I_1}\Omega_3\Omega_1$$
$$I_3\dot{\Omega}_3+\underbrace{(I_2-I_1)}_{=0}\Omega_2\Omega_1=0\Rightarrow I_3\dot{\Omega}_3=0\Rightarrow\Omega_3(t)=\text{konst.}$$

$$\Omega_2=\frac{-I_1}{(I_3-I_1)\Omega_3}\dot{\Omega}_1$$

dosazením
$$\ddot{\Omega}_1+\underbrace{\frac{(I_3-I_1)^2}{I_1^2}\Omega_3^2}_{\text{ozn }\omega^2>0}\Omega_1=0$$

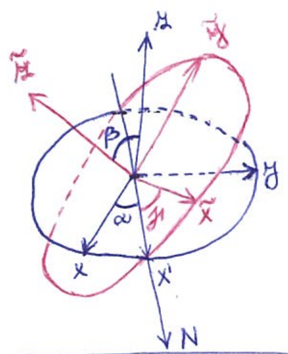
$$\omega=\left|\frac{I_3-I_1}{I_1}\Omega_3\right|$$

řešení
$$\left.\begin{aligned}\Omega_1&=A\cos(\omega t+\varphi)\\ \Omega_2&=+A\sin(\omega t+\varphi)\end{aligned}\right\}\text{precese}$$
$$\Omega_3=\text{konst}\quad\ldots\text{rotace}$$



3. **Volný asymetrický setrvačník** (řešení pomocí eliptických funkcí).

Eulerovy úhly



orientaci průsečnice rovin N volíme tak, aby $z,\tilde{z},N$ tvořily pravotočivou soustavu

Báze $B\sim(x,y,z)$ — otočení o α kolem osy z — $B'=B\,S(\alpha)$

$B'\sim(x',y',z'=z)$ — otočení o β kolem osy x' — $B''=B'S(\beta)$

$B''\sim(x''=x',y'',z'')$ — otočení o γ kolem osy z'' — $\tilde{B}=B''S(\gamma)$

$\tilde{B}\sim(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}=z'')$

$$S(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\ \sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad S(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}\quad S(\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\ \sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

kdy $\tilde{B}=B''S(\gamma)=B'S(\beta)S(\gamma)=B\underbrace{S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)}_{S\ \ldots\ \text{matice přechodu od } B\to\tilde{B}}$

$$S=S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)=\ldots$$

$$\begin{pmatrix}0&\tilde{\Omega}_3&-\tilde{\Omega}_2\\ &0&\tilde{\Omega}_1\\ &&0\end{pmatrix}=\tilde{\omega}=-S^T\dot{S}=\ldots=\begin{pmatrix}0&\dot{\gamma}+\dot{\alpha}\cos\beta&\dot{\beta}\sin\gamma-\dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma\\ &0&\dot{\beta}\cos\gamma+\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma\\ &&0\end{pmatrix}$$

Jinak (Euler) ← rozpis do ne O.G. báze

$$\vec{\Omega}=\dot{\alpha}\vec{z}+\dot{\beta}\vec{x}'+\dot{\gamma}\vec{\tilde{z}}=\dot{\alpha}\vec{e}_3+\dot{\beta}\vec{e}_1'+\dot{\gamma}\vec{\tilde{e}}_3$$

$$\vec{\tilde{\Omega}}=\dot{\alpha}(\vec{e}_3)_{\tilde{B}}+\dot{\beta}(\vec{e}_1')_{\tilde{B}}+\dot{\gamma}(\vec{\tilde{e}}_3)_{\tilde{B}}$$

$$(\vec{\tilde{e}}_3)_{\tilde{B}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(\vec{e}_1')_{\tilde{B}}=\begin{pmatrix}\cos\gamma\\-\sin\gamma\\0\end{pmatrix}\quad(\vec{e}_3)_{\tilde{B}}=\begin{pmatrix}\sin\beta\sin\gamma\\ \sin\beta\cos\gamma\\ \cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\vec{\tilde{\Omega}}=\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma+\dot{\beta}\cos\gamma\\ \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma-\dot{\beta}\sin\gamma\\ \dot{\alpha}\cos\beta+\dot{\gamma}\end{pmatrix}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\gamma\qquad\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=+\cos\gamma$

$z\perp N\wedge\tilde{z}\perp N\Rightarrow$ projekce z do $\tilde{x},\tilde{y}$ bude $\perp N$

Pohyby

- Precese $\alpha=\alpha(t)$, β,γ konst.
- Nutace $\beta=\beta(t)$, α,γ konst.
- Rotace $\gamma=\gamma(t)$, α,β konst