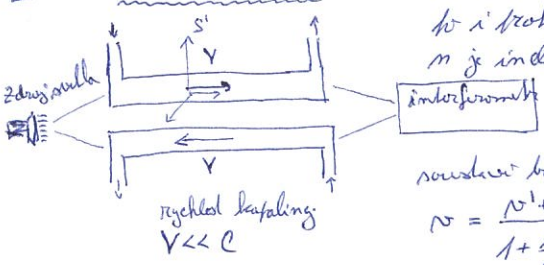
7.15 **Fizeaův pokus (1859)** Fizeau měřil pomocí interferometru rychlost světla v kapalinách tekoucích po i proti směru šíření světla (rychlost $\pm V$) a zjistil závislost $v = \frac{c}{n} \pm V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ kde n je index lomu kapaliny. Odvoďte tento empirický vztah pomocí skládání rychlostí.



v soustavě proudící vody S' má světlo rychlost $v' = \frac{c}{n}$ a v laboratorní soustavě bude

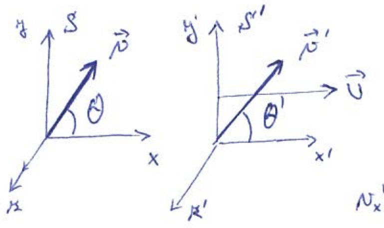
Taylor do 1. řádu ve $\frac{V}{c}$

$$v = \frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n}+V}{1+\frac{cV}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n}+V}{1+\frac{1}{n}\frac{V}{c}} \doteq \left(\frac{c}{n}+V\right)\left(1-\frac{1}{n}\frac{V}{c}\right) = \frac{c}{n} + V - \frac{1}{n^2}\frac{cV}{c} - \frac{1}{n}\frac{V^2}{c} = \underline{\underline{\frac{c}{n}+V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}} - \frac{1}{n}\frac{V^2}{c}$$

malé oproti předchozímu

druhého řádu ve $\frac{V}{c}$

7.17 Odvoďte vztahy mezi úhly θ a θ' které svírají rychlosti $\vec{v}$ a $\vec{v}'$ s osama x, x' v soustavách S, S' svázaných speciální Lorentzovou transformací.



$$x' = \frac{x-Ut}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = \gamma(x-Ut) \qquad y' = y$$

$$t' = \frac{t-\frac{U}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} = \gamma\left(t-\frac{U}{c^2}x\right)$$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma(v_x-U)}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{\frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}}{\frac{\gamma(v_x-U)}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}} = \frac{v_y}{\gamma(v_x-U)} = \frac{v\sin\theta}{\gamma(v\cos\theta-U)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\frac{U}{v}}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}$$

$$\sin\theta' = \frac{v_y'}{v'} = \frac{v_y'}{(v_x'^2+v_y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}\frac{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)}{\sqrt{v_y^2+\gamma^2(v_x-U)^2}} = \frac{v\sin\theta}{v\sqrt{\sin^2\theta+\gamma^2\left(\cos\theta-\frac{U}{v}\right)^2}}$$

7.18 Odvoďte transformační vztahy ze 7.17 pro případ $v = v' = c$ a vypočtěte $\Delta\theta = \theta'-\theta$ při $U \ll c$. označíme $\beta = \frac{U}{c}$

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta-\beta}\sqrt{1-\beta^2} \qquad \sin\theta' = \frac{v_y'}{v'} = \frac{v_y'}{c} = \frac{1}{c}\frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)} = \frac{c\sin\theta}{c\gamma\left(1-\frac{Uc\cos\theta}{c^2}\right)} = \frac{\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\sqrt{1-\beta^2}$$

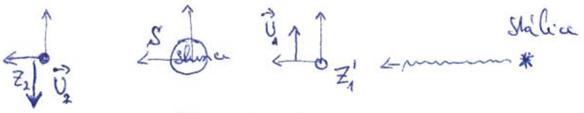
$$\cos\theta' = \frac{v_x'}{v'} = \frac{v_x'}{c} = \frac{1}{c}\frac{\gamma(v_x-U)}{\gamma\left(1-\frac{Uv_x}{c^2}\right)} = \frac{1}{c}\frac{(c\cos\theta-U)}{1-\frac{Uc\cos\theta}{c^2}} = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\Delta\theta = \theta'-\theta \approx \sin(\theta'-\theta) = \sin\theta'\cos\theta - \sin\theta\cos\theta' = \frac{\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} - \frac{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\beta}{1-\beta\cos\theta} = \frac{\beta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right)}{1-\beta\cos\theta}$$

Taylor do 1. řádu v β

$$\Delta\theta \approx \left(\beta\sin\theta + \cancel{\sin\theta\cos\theta\left(\underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{\approx 1}-1\right)}\right)\cdot(1+\beta\cos\theta) = \beta\sin\theta + \cancel{\beta^2\sin\theta\cos\theta} \doteq \underline{\underline{\beta\sin\theta}}$$

7.19 **Aberace světla stálic (1725 Bradley).** Hvězdy na obloze opisují během roku na obloze malé elipsy, kružnice nebo úsečky o úhlovém rozměru as $41''$. Vysvětlete tento jev pohybem Země kolem Slunce střední rychlostí $U = 30$ km/s.



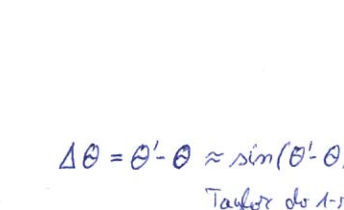
$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \Delta\theta \doteq \beta\sin\theta$$

$$\beta_1 = \beta \qquad \beta_2 = -\beta$$

$$\Delta\theta' = \theta_1' - \theta_2' = \theta_1' - \theta + \theta - \theta_2' = \Delta\theta_1 - \Delta\theta_2 = \beta_1\sin\theta - \beta_2\sin\theta = 2\beta\sin\theta = 2\cdot\frac{U}{c}\sin\frac{\pi}{2} = 2\,\frac{30\cdot10^3}{3\cdot10^8} = 2\cdot10^{-4}\,\text{rad}$$

$$\doteq 2\cdot 0°0'20{,}63'' = \underline{\underline{41{,}25''}}$$

7.20 **Dopplerův jev** Inerciální soustavy S (pozorovatel) a S' (zdroj monochromatické rovinné vlny s úhlovou frekvencí ω_0) jsou svázány speciální L.T. Jakou frekvenci bude pozorovat pozorovatel.
Návod: vyjádřete fázi vlny a porovnejte koeficienty u t'.



v S': $\vec{n}' = (\cos\theta', \sin\theta', 0) \qquad \omega' = \omega_0$

S: $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

Jedná se o stejnou událost pouze z hlediska jiných soustav (jako $\varphi'(x') = \varphi(x)$)

fáze vlny: $\omega\left(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right) = \omega'\left(t' - \frac{\vec{r}'\vec{n}'}{c}\right)$

$$\omega\left(t - \frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{c}\right) = \omega'\left(t' - \frac{x'\cos\theta'+y'\sin\theta'}{c}\right)$$

$$\omega\left(\gamma\left(t'+\frac{Ux'}{c^2}\right) - \frac{\gamma}{c}(x'+Ut')\cos\theta - \frac{y'}{c}\sin\theta\right) = \omega'\left(t' - \frac{1}{c}(x'\cos\theta'+y'\sin\theta')\right)$$

koeficienty u t': $\omega(1-\beta\cos\theta)\gamma = \omega' \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}} = \underline{\underline{\omega_0\frac{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}{1-\frac{U}{c}\cos\theta}}}$

stačí, neboť při transformaci úhlů se čas nevyskytuje

__podélný__ Dopplerův jev $\theta = 0$

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}{1-\frac{U}{c}} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\frac{U}{c}}{1-\frac{U}{c}}}$$

__příčný__ Dopplerův jev. $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}$$