Analytická Mechanika

Alternativní formulace klasické mechaniky, základní veličiny jsou skalární funkce
výhody – eliminace síly, snadné zobecnění mimo oblast mechaniky (teorie pole, kvantová mechanika)
– efektivita pro složité úlohy, elegance, možnost užití vyšší matematiky

Lagrangeova formulace mechaniky (Joseph Louis Lagrange 1788)

Počet stupňů volnosti Δ = počet navzájem nezávislých pohybů, které může mechanická soustava konat

- pro soustavu $N \in \mathbb{N}$ volných částic (hmotných bodů) $\Delta = 3N$
- konfiguraci soustavy (polohu všech jejích bodů) budeme reprezentovat jediným bodem $\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$ v 3N rozměrném euklidovském prostoru tzv. Konfigurační prostor

$\vec{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (X_1, \dots, X_{3N}) = (x_1, \dots, x_{3N})$ souřadnice tj. $x_{\alpha i} = X_{(\alpha-1)N+i}$

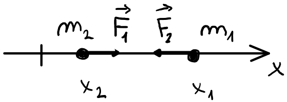
později budeme psát malé

- hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3$ hmotnost 1. bodu $(X_1, X_2, X_3) = \vec{x}_1$ $\qquad \dfrac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$ $\qquad \dfrac{\partial x_{\alpha i}}{\partial x_{\beta j}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$

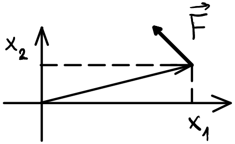
  $m_4 = m_5 = m_6$ 2. bodu $(X_4, X_5, X_6) = \vec{x}_2$

  $\vdots$ $\qquad\qquad \vdots$

Př. $N = 2$ body v $\mathbb{R}$



$\Rightarrow$ 1 bod v $\mathbb{R}^2$



$\vec{X} = (x_1, x_2)$

Vzaby – jakékoliv podmínky omezující pohyb hm. bodů nebo těles tvořících mechanickou soustavu

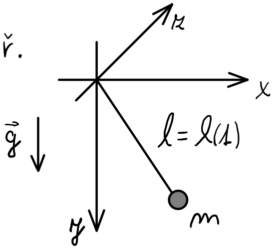
Def:
- holonomní – vazby které lze vyjádřit podmínkami tvaru $f_k(\vec{X}, t) = 0, \quad \forall k \in \hat{n}$ ← Snižují počet stupňů volnosti
- neholonomní – všechny ostatní (např. $g(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, t) = 0$, $|\ddot{\vec{X}}| \leq K$)

- skleronomní (stacionární) – nezávislé na čase (např. $f(\vec{x}) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$)
- rheonomní (nestacionární) – závislé na čase (např. $g(x, y, t) = x \sin t + y \cos t = 0$

- udržující (oboustranné) – vyjádřené pomocí rovnosti $=$
- neudržující (jednostranné) – vyjádřené pomocí nerovnosti $>, \geq$

- ideální – nedochází k disipaci mechanické energie (Virtuální práce vazebných sil je nula)
- neideální – dochází k disipaci energie (např. tření)

Př.



Matematické kyvadlo s proměnlivou délkou závěsu

vazby: $f_1(z) = z = 0$ holonomní, skleronomní, udržující, ideální

$f_2(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$ holonomní, rheonomní, udržující, ideální

Pozn. Holonomní vazba je vždy udržující.

Skrytě holonomní vazby – vazby lineární v rychlostech, které lze nahradit holonomními vazbami (semiholonomní)

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\vec{x},t)\,\dot{x}_i + b(\vec{x},t) = 0 \quad \Big/ \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\sum_{i=1}^{3N} \underbrace{a_i(\vec{x},t)}_{=\frac{\partial f}{\partial x_i}}\, dx_i + \underbrace{b(\vec{x},t)}_{=\frac{\partial f}{\partial t}}\, dt}^{LS} = 0$$

$\dot{x}_i\, dt = dx_i$

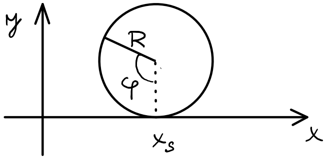
pokud existuje $f = f(\vec{x},t)$ tak, že platí $df = LS$ je vazba skrytě holonomí

Vazba je skrytě holonomní pokud $\exists\, \mu = \mu(\vec{x},t) \neq 0$ (integrační faktor $\mu(LS) = df$) a platí podmínky:

$$\frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu a_j)}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x_i} \qquad \forall i,j \in \widehat{3N}$$

Př. Valení válce bez prokluzování

(vzájemná rychlost bodů dotyku je nulová)

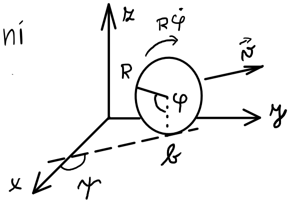


$\dot{x}_s - R\dot{\varphi} = 0 \quad \Big/ \int dt \qquad \int \underbrace{\dot{x}_s\, dt}_{dx_s} - \int R\, \underbrace{\dot{\varphi}\, dt}_{d\varphi} = 0$

$dx_s - R\,d\varphi = 0$

$f(x_s,\varphi) = x_s + x_0 - R\varphi = 0$ je holonomní

Př. Valení kotouče po rovině bez prokluzování a naklánění



$$v_b = v - R\dot{\varphi} = 0$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$
$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - R\dot{\varphi} = 0$$
$$\dot{x} = R\dot{\varphi}\cos\psi \qquad \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\psi$$
$$dx = R\cos\psi\, d\varphi \qquad dy = R\sin\psi\, d\varphi$$

? $\exists f = f(x, y, \varphi, \psi) = 0$?

Eulerovy úhly
$\psi = \alpha$
$\theta = \beta = \frac{\pi}{2}$
$\varphi = \gamma$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi}d\psi =$$
$$= \underbrace{\Big(R\cos\psi\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0} + R\sin\psi\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}_{=0}\Big)}_{=0} d\varphi + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \psi}}_{=0} d\psi = 0 \quad \forall d\varphi, d\psi$$

$(\forall \psi) \wedge (1, \cos\psi, \sin\psi)$ LN soubor

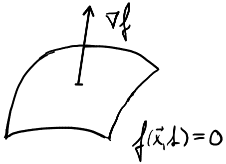
<u>Holonomní soustava</u> – soustava, která je podrobena pouze holonomním a semiholonomním vazbám

– dále budeme v analytické mechanice pracovat pouze s holonomními soustavami a zapisovat všechny jejich vazby jako holonomní

Vazbové síly holonomních vazeb (Reakční síly) – nejsou známé předem (narozdíl od akčních sil)

$$\vec{F}^{(vaz)} = \vec{R} = \underbrace{\vec{T}}_{\text{tečná složka}} + \underbrace{\vec{N}}_{\text{normálová složka}} \in \mathbb{R}^{3N}$$

pro jednu vazbu $f(\vec{x}, t) = 0$



$$\vec{N} = \lambda \nabla f$$

$$N_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, 3N$$

Lagrangeův multiplikátor

$$\lambda = \lambda(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

určuje velikost vazbové síly

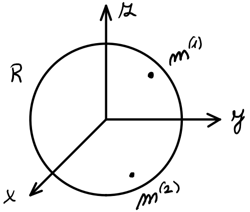
holonomní vazba
- hladká $\vec{T} = 0$ (ideální)
- drsná $\vec{T} \neq 0$ (tření, neideální)

Př. izotropní vlečné tření $T_i = -k|\lambda| \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2} \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\sum \dot{x}_j^2}}$

pro $r \in \mathbb{N}$ hladkých holonomních vazeb $f_k(\vec{x}, t) = 0$ platí $F_i^{(vaz)} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

Pozn. Nebude-li řečeno jinak, tak holonomní vazbu považujeme vždy za hladkou.

Př. Dva hmotné body vázané na sféru $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$



$$\vec{X} = (\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$m^{(1)} = m_1 = m_2 = m_3 \qquad m^{(2)} = m_4 = m_5 = m_6$$

vazby: $f_1(\vec{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$

 $f_2(\vec{X}) = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - R^2 = 0$

stupně volnosti

$$s = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

vazebné síly:

$$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_4 \\ 2x_5 \\ 2x_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \text{síla na 1. částici} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}\right\} \text{síla na druhou částici v } \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

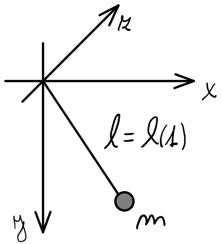
Lagrangeovy rovnice 1. druhu (1775)

$$\boxed{\begin{array}{l} m_i\ddot{x}_i = F_i(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i} \\[2ex] f_k(\vec{x},t) = 0 \quad \forall k\in\hat{r} \qquad \forall i\in\widehat{3N} \end{array}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{r} T_i^{(k)}}_{=0}$$

pro hladké vazby

- pro soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami v inerciální vztažné soustavě (kartézské souřadnice)
- obyčejné diferenciální rovnice II. řádu pro $3N+r$ neznámých funkcí $x_i(t)=?$ $\quad i\in\widehat{3N}$ $\quad \lambda_k(t)=?$ $\quad k\in\hat{r}=\{1,2,\dots,r\}$

Př.



$\begin{pmatrix}0\\g\\0\end{pmatrix}=\vec{g}\downarrow$ $\qquad l = l(t)$

vazby: $f_1(z) = z = 0$

$f_2(x,y) = x^2+y^2-l^2(t) = 0$

$$\vec{F}_1^{(vaz)} = \lambda_1\nabla f_1 = \lambda_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{F}_2^{(vaz)} = \lambda_2\nabla f_2 = \lambda_2\begin{pmatrix}2x\\2y\\0\end{pmatrix}$$

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0+0+2\lambda_2 x$$

$$m\ddot{y} = mg + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} = mg+0+2\lambda_2 y$$

$$m\ddot{z} = 0 + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0+\lambda_1+0$$

$y\ddot{x}-x\ddot{y} = -xg$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 = \dfrac{m\ddot{x}}{2x}$

substituce
$x = l\sin\varphi$
$y = l\cos\varphi$

$$2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(t)$$