# Základní principy mechaniky

## Základní principy mechaniky – jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

- **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

## Základní principy mechaniky — jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

- **Diferenciální principy** — určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) **Princip virtuální práce** (Bernoulli 1708—1717) — statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\underset{\forall t}{\vec{\vec{x}}(t)} = \vec{\vec{x}}(t_0) = \underset{\text{konst.}}{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix}$$

# Základní principy mechaniky

– jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) **Princip virtuální práce** (Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\vec{\vec{x}}(t) = \vec{\vec{x}}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix} \quad \forall t, \quad \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\vec{x}}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{\vec{x}}}(t) = 0 \ \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{x}_0, 0, t) = 0 \ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

# Základní principy mechaniky – jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) **Principy virtuální práce** (Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\underset{\forall t}{\vec{x}(t)} = \underset{\text{konst.}}{\vec{x}(t_0)} = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{x}}(t) = 0 \ \ \forall t \overset{2NZ}{\Longrightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{x}_0, 0, t) = 0 \ \ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$ uvažujeme pouze síly nezávislé na čase

$$\Leftarrow \ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,\ \dot{\vec{x}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{x}_i(t_0) = F_i(\vec{x}_0, 0) = 0 \ \ \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{x}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\dot{x}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\ddot{x}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \dot{\vec{x}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{x}}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots = \vec{x}_0$$

# Základní principy mechaniky — jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** — určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1, **Princip virtuální práce** (Bernoulli 1708—1717) — statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\vec{\vec{x}}(t) = \vec{\vec{x}}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix} \quad \underset{\forall t}{} \quad \underset{\text{konst.}}{}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{\vec{x}}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{\vec{x}}}(t) = 0 \quad \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{x}_0, 0, t) = 0 \ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

$$\Leftarrow \quad \vec{\vec{x}}(t_0) = \vec{x}_0,\ \dot{\vec{\vec{x}}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{\vec{x}}_i(t_0) = F_i(\vec{x}_0, 0) = 0 \quad \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{\vec{x}}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} F_i(\vec{\vec{x}}, \dot{\vec{\vec{x}}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\dot{x}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\ddot{x}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vec{\vec{x}}(t) = \vec{\vec{x}}(t_0) + \dot{\vec{\vec{x}}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{\vec{x}}}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots = \vec{x}_0$$

a, volných

(2NZ) $\quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$

výslednice sil

# Základní principy mechaniky – jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

- **Diferenciální principy** – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

## 1) Princip virtuální práce (Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\underset{\forall t}{\vec{x}(t)} = \vec{x}(t_0) = \underset{\text{konst.}}{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,3N} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{x}}(t) = 0 \quad \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{x}_0, 0, t) = 0 \quad \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$ uvažujeme pouze síly nezávislé na čase

$$\Leftarrow \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,\ \dot{\vec{x}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{x}_i(t_0) = F_i(\vec{x}_0, 0) = 0 \quad \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{x}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\dot{x}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0)\underbrace{\ddot{x}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \dot{\vec{x}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{x}}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots = \vec{x}_0$$

a) volných

(2NZ) $\quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \iff 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} \quad \underbrace{\forall\, \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}}$

výslednice sil

(stačilo by pro lib. bázi $\mathbb{R}^{3N}$)
stačí libovolně malé – infinitezimální

Vektor $\delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy $\vec{x}_0$ do bodu $\vec{x}$

Pozn. práce $A = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{đA(\vec{x})} = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

Pozn. práce $A = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{đA}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \, \delta x_i$

je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\Longleftrightarrow$ $\delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}$

Pozn. práce $A = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\underbrace{đA(\vec{x})}_{\text{nemusí být exaktní}} = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$

je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$

(izochronní $\delta t = 0$ )

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i}_{= \delta f} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j}_{= \delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$

$\delta f$ = *lineární část* $\left[ f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t) \right]$

Pozn. práce $A = \int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overbrace{đA}^{\text{nemusí být exaktní}}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

Virtuální práce $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$

je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$ $\quad f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j}_{=\delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$

(izochronní $\delta t = 0$ )

$\delta f = \text{lineární část} \left[ f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t) \right]$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$ pak

$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta U$

a rovnovážné polohy $\vec{x}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Pozn. práce $A=\int_\gamma \vec F(\vec x)\cdot d\vec x$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{\text{đ}}A(\vec x)=\vec F(\vec x)\cdot \underbrace{d\vec x}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec x=\gamma'(\ell)\,d\ell$ )

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec x)=\vec F(\vec x,0)\cdot\delta\vec x=\sum_{i=1}^{3N}F_i\,\delta x_i$

je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec x_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec x_0)=\vec F(\vec x_0,0)\cdot\delta\vec x=0 \quad \forall\delta\vec x$

Pozn. Variace funkce $f=f(\vec x,t)$ $\quad f(\vec x+\delta\vec x,t)=f(\vec x,t)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\delta x_i\delta x_j}_{=\delta^2 f}+\ldots=f(\vec x,t)+\delta f(\vec x,t)+\frac{1}{2}\delta^2 f(\vec x,t)+\ldots$

(izochronní $\delta t=0$ )

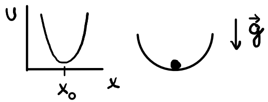
$\delta f=$ **lineární část** $[f(\vec x+\delta\vec x,t)-f(\vec x,t)]$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$\vec F(\vec x)=-\nabla U(\vec x)=-\frac{\partial U(\vec x)}{\partial\vec x}$ pak

$\delta A=\vec F\cdot\delta\vec x=-\frac{\partial U}{\partial\vec x}\cdot\delta\vec x=-\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i=-\delta U$

a rovnovážné polohy $\vec x_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec x_0)=0$ potenciální energie.

| Typ polohy | $U(\vec x_0)$ | např. | |
|---|---|---|---|
| • stabilní | minimum | $\delta^2 U(\vec x_0)>0$ |  |

Pozn. práce $A = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{đ} A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i\, \delta x_i$

je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:

$\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\Leftrightarrow$ $\delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$ (izochronní $\delta t = 0$ )

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i}_{= \delta f} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j}_{= \delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$

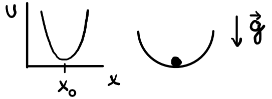
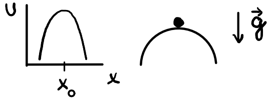
$$\delta f = \text{lineární část} \left[ f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t) \right]$$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$ pak

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta U$$

a rovnovážné polohy $\vec{x}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

| Typ polohy | $U(\vec{x}_0)$ | např. | |
|---|---|---|---|
| • stabilní | minimum | $\delta^2 U(\vec{x}_0) > 0$ |  |
| • labilní | maximum | $\delta^2 U(\vec{x}_0) < 0$ |  |

Pozn. práce $A = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $\overset{\text{nemusí být exaktní}}{đ} A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \underbrace{d\vec{x}}_{\text{musí být malé (infinitezimální)}}$ po křivce $\gamma$ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(\ell)\, d\ell$ )

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i\, \delta x_i$
je práce sil při virtuálních posunutích

Princip virtuální práce:
$\vec{x}_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \quad \forall \delta\vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$
(izochronní $\delta t = 0$ )

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j}_{=\delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$

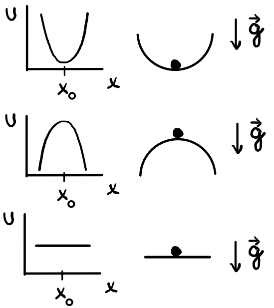
$$\delta f = \textit{lineární část}\, [f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)]$$

Jsou-li všechny síly konzervativní
$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}}$ pak

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta U$$

a rovnovážné polohy $\vec{x}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

| Typ polohy | $U(\vec{x}_0)$ | např. |
|---|---|---|
| • stabilní | minimum | $\delta^2 U(\vec{x}_0) > 0$ |
| • labilní | maximum | $\delta^2 U(\vec{x}_0) < 0$ |
| • indiferentní | ostatní | "$(\delta^2 U = 0)$" |



b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

(LR1D) $0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$

vtištěné síly (akční) — vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad$ $f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

(LR1D) $0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$

vtištěné síly (akční)

vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \qquad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \qquad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

$$(LR1D) \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

vtištěné síly (akční)

vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

$$\iff 0 = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \left(\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N\right) = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N\right) \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T + \vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N + \left(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x}^T$$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \qquad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

(LR1D) $0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$

vtištěné síly (akční)

vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad$ $f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

$$\iff 0 = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \left(\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N\right) = \underbrace{\left(\vec{F}^T + \vec{F}^N\right)}_{\vec{F}} \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right)}_{=0} \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x}^T$$

$\forall \delta\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

$\delta\vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \qquad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

(LR1D) $\quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{x} \quad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$

vtištěné síly (akční) — $\vec{F}(\vec{x}_0, 0)$

vazbové síly (reakční) — $\vec{R}(\vec{x}_0, 0)$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n} \qquad\qquad f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

$$\iff 0 = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \left(\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N\right) = \underbrace{\left(\vec{F}^T + \vec{F}^N\right)}_{\vec{F}} \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \nabla f_k\right)}_{=0} \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x}^T$$

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

$\forall \delta\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$

$\delta\vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n}$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

Princip virtuální práce

$$\boxed{\begin{gathered} \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 \qquad \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{n} \qquad \delta\vec{x} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \end{gathered}}$$

Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \iff$ virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \iff$ práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x})=0\ \ \forall k\in\hat{n}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x}=\delta\vec{x}^T+\delta\vec{x}^N \qquad \vec{F}=\vec{F}^T+\vec{F}^N$

(LR1D) $$0=\vec{F}(\vec{x}_0,0)+\vec{R}(\vec{x}_0,0)=\vec{F}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k \iff 0=\Big(\vec{F}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k\Big)\cdot\delta\vec{x}\quad \forall\delta\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}$$

vtištěné síly (akční) vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0)=0\ \ \forall k\in\hat{n}$ $\qquad$ $f_k(\vec{x}_0)=0\ \ \forall k\in\hat{n}$

$$\iff 0=\Big(\vec{F}^T+\vec{F}^N+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k\Big)\cdot(\delta\vec{x}^T+\delta\vec{x}^N)=\underbrace{(\vec{F}^T+\vec{F}^N)}_{\vec{F}}\cdot\delta\vec{x}^T+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}^T}_{=0}+\underbrace{\vec{F}^T\cdot\delta\vec{x}^N}_{=0}+\underbrace{\Big(\vec{F}^N+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k\Big)}_{=0}\cdot\delta\vec{x}^N=\vec{F}(\vec{x}_0,0)\cdot\delta\vec{x}^T$$

$f_k(\vec{x}_0)=0\ \ \forall k\in\hat{n}$

$\forall\delta\vec{x}^T\in\mathbb{R}^{3N}$

$\delta\vec{x}^T\cdot\nabla f_k(\vec{x}_0)=0\ \ \forall k\in\hat{n}$

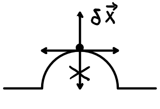
zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1,\dots,\nabla f_n)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

Princip virtuální práce

$$\boxed{\begin{array}{ll}\delta A(\vec{x}_0)=\vec{F}(\vec{x}_0,0)\cdot\delta\vec{x}=0 & \forall\delta\vec{x}\in\mathbb{R}^{3N}\\ f_k(\vec{x}_0)=0\quad\forall k\in\hat{n} & \delta\vec{x}\cdot\nabla f_k(\vec{x}_0)=0\end{array}}$$

Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0\in M\subset\mathbb{R}^{3N}$ $\iff$ virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0)=0$ $\iff$ práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vratná posunutí $(\forall\delta\vec{x}\ \exists-\delta\vec{x})$
pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A=\vec{F}\cdot\delta\vec{x}\leq 0$



Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x}) = 0$

$$\underbrace{f(\vec{x}_0 + \delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \underbrace{\delta\vec{x}} + \underbrace{\sigma(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$$

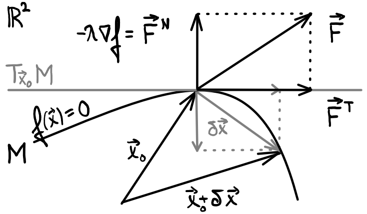
malé posunutí (infinitezimální)

Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x}) = 0$

$$\underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \underbrace{\delta\vec{x}}_{} + \underbrace{\mathcal{O}(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$$

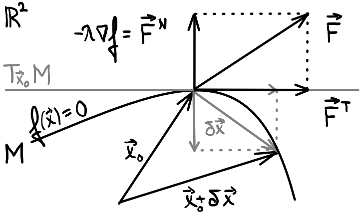
malé posunutí
(infinitezimální)




Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\quad \underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \underbrace{\delta\vec{x}}_{} + \underbrace{\sigma(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$

malé posunutí (infinitezimální)




Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ pak $0 = \delta A = (-\nabla U + \lambda_k \nabla f_k)\cdot\delta\vec{x} = -\delta(U \underbrace{-\lambda_k f_k}) = -\delta\tilde{U}$

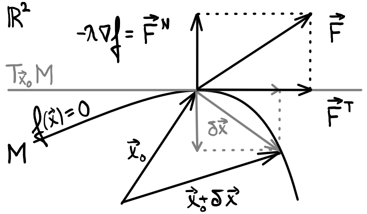
"potenciální energie vazebných sil"

a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

t. j. $\quad \delta\tilde{U}(\vec{x}_0) = 0 \quad f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \qquad \delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)\big/_{T_{\vec{x}_0}M}$ $> 0$ stabilní, $< 0$ labilní, $= 0$ indiferentní

Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\quad \underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \delta\vec{x} + \underbrace{\sigma(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$

malé posunutí (infinitezimální)




Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x})=-\nabla U(\vec{x})$ pak $0=\delta A=(-\nabla U+\lambda_k\nabla f_k)\cdot\delta\vec{x} = -\delta(U-\underbrace{\lambda_k f_k}) = -\delta\tilde{U}$

"potenciální energie vazebných sil"

a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě $M$

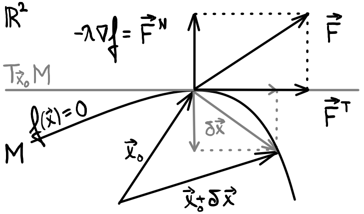
t. j. $\quad \delta\tilde{U}(\vec{x}_0)=0 \quad f_k(\vec{x}_0)=0 \;\; \forall k\in\hat{r} \qquad \delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)\Big/_{T_{\vec{x}_0}M}$ $>0$ stabilní, $<0$ labilní, $=0$ indiferentní

<u>Infinitezimální posunutí</u> holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x},t)=0 \;\; \forall k\in\hat{r} \qquad \vec{x}=\vec{x}(\vec{q},t)$

• možné (reálné) $\;0=df_k=\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt \qquad dx_i=\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}dt \qquad f(\vec{x}+d\vec{x},t+dt)=f(\vec{x},t)+\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot d\vec{x}+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\ldots$

Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\quad \underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \delta\vec{x} + \underbrace{\mathcal{O}(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$

malé posunutí (infinitezimální)




Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ pak $0 = \delta A = (-\nabla U + \lambda_k \nabla f_k)\cdot\delta\vec{x} = -\delta(U - \underbrace{\lambda_k f_k}) = -\delta\tilde{U}$

a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

"potenciální energie vazebných sil"

t. j. $\quad \delta\tilde{U}(\vec{x}_0) = 0 \quad f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{n} \qquad \delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)\Big/_{T_{\vec{x}_0}M}$ $\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{stabilní} \\ \text{labilní} \\ \text{indiferentní} \end{matrix}$

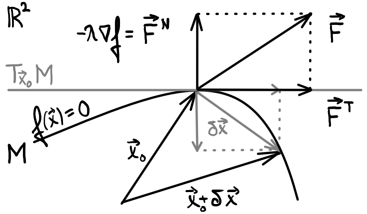
<u>Infinitezimální posunutí</u> holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x},t) = 0 \quad \forall k \in \hat{n} \qquad \vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q},t)$

- možné (reálné) $\quad 0 = df_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt \qquad dx_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} dt \qquad f(\vec{x}+d\vec{x}, t+dt) = f(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot d\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots$

- virtuální $\quad 0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i \qquad \delta x_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad f(\vec{x}+\delta\vec{x}, t) = f(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot\delta\vec{x} + \dots$

Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $\quad \underbrace{f(\vec{x}_0+\delta\vec{x})}_{=0} = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \delta\vec{x} + \underbrace{\sigma(|\delta\vec{x}|^2)}_{\doteq 0}$

malé posunutí (infinitezimální)




Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimánlní posunutí ve shodě s vazbou

Jsou-li všechny vtištěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ pak $0 = \delta A = (-\nabla U + \lambda_k \nabla f_k)\cdot\delta\vec{x} = -\delta(U - \underbrace{\lambda_k f_k}_{\text{"potenciální energie vazebných sil"}}) = -\delta\tilde{U}$
a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M
t. j. $\quad \delta\tilde{U}(\vec{x}_0) = 0 \quad f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{n} \qquad \delta^2\tilde{U}(\vec{x}_0)\Big|_{T_{\vec{x}_0}M} \begin{cases} > 0 & \text{stabilní} \\ < 0 & \text{labilní} \\ = 0 & \text{indiferentní} \end{cases}$

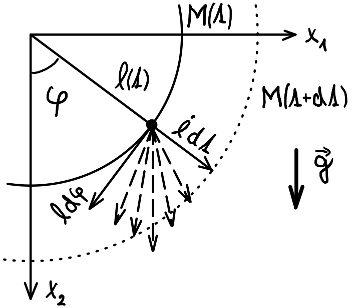
<u>Infinitezimální posunutí</u> holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x},t) = 0 \ \forall k \in \hat{n} \qquad \vec{x} = \hat{\vec{x}}(\vec{q},t)$

- možné (reálné) $\quad 0 = df_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t}dt \qquad dx_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t}dt \qquad f(\vec{x}+d\vec{x}, t+dt) = f(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot d\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \dots$

- virtuální $\quad 0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i \qquad \delta x_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad f(\vec{x}+\delta\vec{x}, t) = f(\vec{x},t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\cdot\delta\vec{x} + \dots$

- skutečné $\quad 0 = d\tilde{f}_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{\tilde{x}}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t}\right)dt \qquad d\tilde{x}_i = \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}\dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t}\right)dt$ $\quad$ lze získat z možného posunutí dosazením trajektorie $x_i = \tilde{x}_i(t)$, $q_j = \tilde{q}_j(t)$

Př.



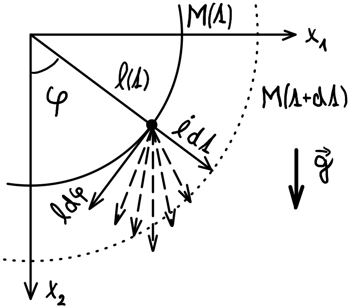

$$f(x_1, x_2, 1) = x_1^2 + x_2^2 - l^2(1) = 0$$

$$x_1 = l(1)\sin\varphi$$

$$x_2 = l(1)\cos\varphi$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Př.




$$f(x_1, x_2, 1) = x_1^2 + x_2^2 - l^2(1) = 0$$

$$x_1 = l(1)\sin\varphi$$
$$x_2 = l(1)\cos\varphi$$

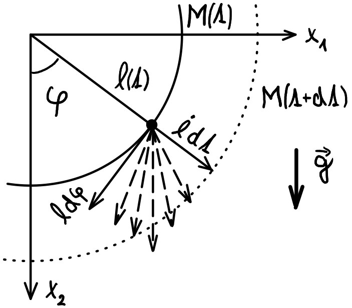
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$$0 = \delta f = 2x_1\delta x_1 + 2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} l\,\delta\varphi$$

$$\delta A = (\vec{F} + \lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x} = \vec{F}\cdot\delta\vec{x} + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0 \text{ virtuální práce vazebných sil}} = 0\cdot\delta x_1 + (mg)\delta x_2$$

Př.




$$f(x_1,x_2,t) = x_1^2 + x_2^2 - l^2(t) = 0$$

$$x_1 = l(t)\sin\varphi \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix}$$
$$x_2 = l(t)\cos\varphi$$

Možné posunutí a práce

$$0 = df = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 - 2l\dot{l}\,dt$$

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} l\,d\varphi + \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \dot{l}\,dt$$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$$0 = \delta f = 2x_1\delta x_1 + 2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} l\,\delta\varphi$$

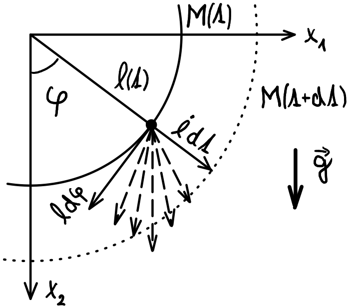
$$\delta A = (\vec{F} + \lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x} = \vec{F}\cdot\delta\vec{x} + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0} = 0\cdot\delta x_1 + (mg)\delta x_2$$

virtuální práce vazebných sil

$$đA = (\vec{F} + \lambda\nabla f)\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot d\vec{x} + \lambda\nabla f\cdot d\vec{x} = 0\cdot dx_1 + mg\,dx_2 + 2\lambda x_1 dx_1 + 2\lambda x_2 dx_2 = mg\,dx_2 + \overbrace{\lambda 2 l\dot{l}\,dt}^{\text{skutečná práce}}$$

výkon vazebné síly $= -\lambda\dfrac{\partial f}{\partial t}$

Př.




$$f(x_1,x_2,t) = x_1^2+x_2^2-l^2(t)=0$$

$$x_1 = l(t)\sin\varphi \qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}$$
$$x_2 = l(t)\cos\varphi$$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$$0=\delta f = 2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,\delta\varphi$$

$$\delta A = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x} = \vec{F}\cdot\delta\vec{x} + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0} = 0\cdot\delta x_1 + (mg)\delta x_2$$

virtuální práce vazebných sil

Možné posunutí a práce

$$0 = df = 2x_1dx_1+2x_2dx_2-2l\dot{l}\,dt$$

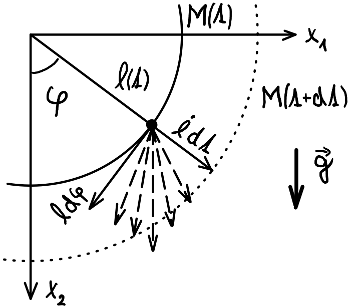
$$d\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,d\varphi + \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{l}\,dt$$

$$đA = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot d\vec{x}+\lambda\nabla f\cdot d\vec{x} = 0\cdot dx_1+mg\,dx_2+2\lambda x_1dx_1+2\lambda x_2dx_2 = mg\,dx_2+\overbrace{\lambda 2l\dot{l}\,dt}^{\text{skutečná práce}}$$

výkon vazebné síly $= -\lambda\dfrac{\partial f}{\partial t}$

Př. pro $l=$ konst. $0=\delta A = mg\,\delta x_2 = -mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi = 0,\pi$ je rovnovážná poloha

Př.




$f(x_1,x_2,t) = x_1^2+x_2^2-l^2(t)=0$

$x_1 = l(t)\sin\varphi$ $\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}$

$x_2 = l(t)\cos\varphi$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$0=\delta f = 2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,\delta\varphi$

$\delta A = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x} = \vec{F}\cdot\delta\vec{x} + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0} = 0\cdot\delta x_1 + (mg)\delta x_2$

virtuální práce vazebných sil

Možné posunutí a práce

$0 = df = 2x_1dx_1+2x_2dx_2-2l\dot{l}\,dt \qquad d\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,d\varphi + \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{l}\,dt$

$dA = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot d\vec{x} + \lambda\nabla f\cdot d\vec{x} = 0\cdot dx_1 + mg\,dx_2 + 2\lambda x_1 dx_1 + 2\lambda x_2 dx_2 = mg\,dx_2 + \overbrace{\lambda 2l\dot{l}\,dt}^{\text{skutečná práce}}$

výkon vazebné síly $= -\lambda\frac{\partial f}{\partial t}$

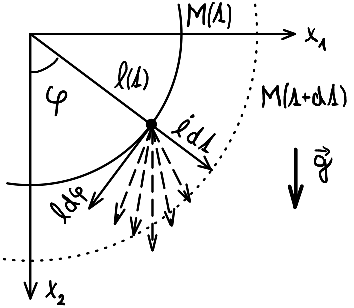
Př. pro $l=$ konst. $0=\delta A = mg\delta x_2 = -mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi = 0,\pi$ je rovnovážná poloha

2) **d'Alembertův princip** – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x},t)=0 \;\forall k\in\hat{r}$

(LR1D) $\qquad \mathbb{M}\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \vec{R}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k$

$\mathbb{M} = \mathrm{diag}(m_1,\dots,m_{3N}) \qquad f_k(\vec{x},t)=0\;\forall k\in\hat{r}$

Př.




$$f(x_1,x_2,t) = x_1^2+x_2^2-l^2(t)=0$$

$$x_1 = l(t)\sin\varphi \qquad \vec F = \begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}$$
$$x_2 = l(t)\cos\varphi$$

Možné posunutí a práce

$$0 = df = 2x_1dx_1+2x_2dx_2-2l\dot l\,dt$$

$$d\vec x = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,d\varphi + \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot l\,dt$$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$$0 = \delta f = 2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec x = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix} l\,\delta\varphi$$

$$\delta A = (\vec F+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec x = \vec F\cdot\delta\vec x + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec x}_{=0} = 0\cdot\delta x_1 + (mg)\delta x_2$$

virtuální práce vazebných sil

$$\text{đ}A = (\vec F+\lambda\nabla f)\cdot d\vec x = \vec F\cdot d\vec x + \lambda\nabla f\cdot d\vec x = 0\cdot dx_1 + mg\,dx_2 + 2\lambda x_1dx_1 + 2\lambda x_2dx_2 = mg\,dx_2 + \overbrace{\lambda 2l\dot l\,dt}^{\text{skutečná práce}}$$

výkon vazebné síly $= -\lambda\frac{\partial f}{\partial t}$

Př. pro $l=\text{konst.}$ $0=\delta A = mg\delta x_2 = -mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi = 0,\pi$ je rovnovážná poloha

2) **d'Alembertův princip** – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec x,t)=0 \;\forall k\in\hat r$

(LR1D) $$\mathbb{M}\ddot{\vec x} = \vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) + \vec R(\vec x,\dot{\vec x},t) = \vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k$$

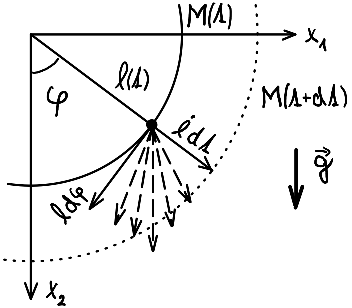
$$\mathbb{M} = \mathrm{diag}(m_1,\dots,m_{3N}) \qquad f_k(\vec x,t)=0 \;\forall k\in\hat r$$

$$\underbrace{\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t)}_{\text{vtištěné síly (akční)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k}_{\text{vazbové síly (reakční)}} \underbrace{-\mathbb{M}\ddot{\vec x}}_{\text{setrvačné síly}} = 0$$

← podmínka rovnováhy sil

Zavedení setrvačné síly $\vec I = -\mathbb{M}\ddot{\vec x}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

Př.




$$f(x_1,x_2,t) = x_1^2+x_2^2-\ell^2(t)=0$$

$$x_1 = \ell(t)\sin\varphi \qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}$$
$$x_2 = \ell(t)\cos\varphi$$

Možné posunutí a práce

$$0 = df = 2x_1dx_1+2x_2dx_2-2\ell\dot{\ell}dt$$

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}\ell d\varphi + \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{\ell}dt$$

Virtuální posunutí a vitruální práce

$$0 = \delta f = 2x_1\delta x_1+2x_2\delta x_2 \qquad \delta\vec{x} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}\ell\delta\varphi$$

$$\delta A = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot\delta\vec{x} = \vec{F}\cdot\delta\vec{x} + \underbrace{\lambda\nabla f\cdot\delta\vec{x}}_{=0 \text{ virtuální práce vazebných sil}} = 0\cdot\delta x_1+(mg)\delta x_2$$

$$dA = (\vec{F}+\lambda\nabla f)\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot d\vec{x}+\lambda\nabla f\cdot d\vec{x} = 0\cdot dx_1+mgdx_2+2\lambda x_1dx_1+2\lambda x_2dx_2 = mgdx_2+\overbrace{\lambda 2\ell\dot{\ell}dt}^{\text{skutečná práce}}$$

výkon vazebné síly $= -\lambda\frac{\partial f}{\partial t}$

Př. pro $\ell=$ konst. $0=\delta A = mg\delta x_2 = -mg\underbrace{\sin\varphi}_{=0}\delta\varphi \Rightarrow \varphi=0,\pi$ je rovnovážná poloha

2) **d'Alembertův princip**—dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k\in\hat{r}$

(LR1D) $$\mathbb{M}\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\vec{R}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k$$

$$\mathbb{M} = \operatorname{diag}(m_1,\dots,m_{3N}) \qquad f_k(\vec{x},t)=0 \ \forall k\in\hat{r}$$

$$\underbrace{\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)}_{\text{vtištěné síly (akční)}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k}_{\text{vazbové síly (reakční)}}\underbrace{-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}}_{\text{setrvačné síly}}=0$$

← podmínka rovnováhy sil

Zavedení setrvačné síly $\vec{I}=-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

Rovnici opět přenásobíme $\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T+\delta\vec{x}^N$

kde $\delta\vec{x}^T\cdot\nabla f_k = 0 \ \forall k\in\hat{r} \quad \delta\vec{x}^N\in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\nabla f_1,\dots,\nabla f_r)$

$$\underbrace{(\vec{F} - \mathbb{M}\ddot{\vec{x}})}_{\text{efektivni sily}}\cdot\delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{(\vec{F} - \mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^T\cdot\delta\vec{x}^N}_{=0} + \Big[\underbrace{(\vec{F} - \mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^N + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\Big]\cdot\delta\vec{x}^N = 0$$

$$\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec{x}^T+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec{x}^T}_{=0}+\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^T\cdot\delta\vec{x}^N}_{=0}+\Big[\underbrace{(\vec{F}-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})^N+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\nabla f_k}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\Big]\cdot\delta\vec{x}^N=0$$

Virtuální práce efektivních sil

$$\delta A_{ef}(\vec{x},\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}},t)=(\vec{F}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)-\mathbb{M}\ddot{\vec{x}})\cdot\delta\vec{x}$$

$$\underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec x^{T} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec x^{T}}_{=0} + \underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})^{T}\cdot\delta\vec x^{N}}_{=0} + \Big[\underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})^{N} + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\Big]\cdot\delta\vec x^{N} = 0$$

<u>Virtuální práce efektivních sil</u>

$$\delta A_{ef}(\vec x,\dot{\vec x},\ddot{\vec x},t) = (\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x$$

d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{array}{lll} \delta A_{ef} = (\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x = 0 & & \forall\delta\vec x\in\mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec x,t) = 0 \quad \forall k\in\hat r & & \delta\vec x\cdot\nabla f_k = 0 \end{array}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),\ddot{\vec{x}}(t),t) = 0$.

$$\underbrace{(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec x^T+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec x^T}_{=0}+\underbrace{(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^T\cdot\delta\vec x^N}_{=0}+\underbrace{\left[(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^N+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k\right]}_{=0\ \text{volbou}\ \lambda_k}\cdot\delta\vec x^N=0$$

Virtuální práce efektivních sil

$$\delta A_{ef}(\vec x,\dot{\vec x},\ddot{\vec x},t)=(\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t)-\mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x$$

d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{array}{ll}\delta A_{ef}=(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x=0 & \forall\delta\vec x\in\mathbb{R}^{3N}\\ f_k(\vec x,t)=0\quad\forall k\in\hat r & \delta\vec x\cdot\nabla f_k=0\end{array}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec x(t),\dot{\vec x}(t),\ddot{\vec x}(t),t)=0$.

Pozn: výhoda – není třeba pracovat se silama ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec x_\alpha=\vec r+\vec r_\alpha$ $|\vec r_\alpha|=konst$ $\delta\vec x_\alpha=\delta\vec r+\delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha$

$$\underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec x^T + \sum_{k=1}^{\hat n}\lambda_k \underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec x^T}_{=0} + \underbrace{(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^T\cdot\delta\vec x^N}_{=0} + \Big[\underbrace{(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^N+\sum_{k=1}^{\hat n}\lambda_k\nabla f_k}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\Big]\cdot\delta\vec x^N = 0$$

Virtuální práce efektivních sil

$$\delta A_{ef}(\vec x,\dot{\vec x},\ddot{\vec x},t) = (\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x$$

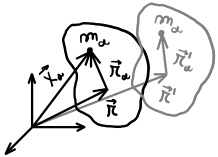
d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta A_{ef} = (\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x = 0 & \forall\delta\vec x\in\mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec x,t) = 0 \quad \forall k\in\hat n & \delta\vec x\cdot\nabla f_k = 0 \end{array}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec x(t),\dot{\vec x}(t),\ddot{\vec x}(t),t) = 0$.

Pozn: výhoda—není třeba pracovat se silama ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec x_\alpha = \vec r + \vec r_\alpha$ $|\vec r_\alpha| = konst$ $\delta\vec x_\alpha = \underbrace{\delta\vec r} + \underbrace{\delta\vec\varphi}\times\vec r_\alpha$

jsou nezávislé



$$\underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec x^T + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec x^T}_{=0} + \underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})^T\cdot\delta\vec x^N}_{=0} + \underbrace{\Big[(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\nabla f_k\Big]}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\cdot\delta\vec x^N = 0$$

Virtuální práce efektivních sil

$$\delta A_{ef}(\vec x,\dot{\vec x},\ddot{\vec x},t) = (\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x$$

## d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta A_{ef} = (\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x = 0 & \forall\delta\vec x\in\mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec x,t) = 0 \quad \forall k\in\hat r & \delta\vec x\cdot\nabla f_k = 0 \end{array}}$$

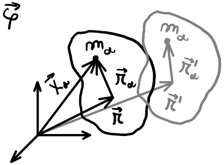
Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec x(t),\dot{\vec x}(t),\ddot{\vec x}(t),t) = 0$.

Pozn: výhoda—není třeba pracovat se silama ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec X_\alpha = \vec r + \vec r_\alpha$ $|\vec r_\alpha| = konst$ $\delta\vec x_\alpha = \underbrace{\delta\vec r} + \underbrace{\delta\vec\varphi}\times\vec r_\alpha$

jsou nezávislé

$$\delta A_{ef} = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec X}_\alpha)\cdot\delta\vec X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec X}_\alpha)\cdot(\delta\vec r+\delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha) = \underbrace{\Big[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec X}_\alpha\Big]}_{=0}\cdot\delta\vec r + \underbrace{\Big[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec r_\alpha\times(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec X}_\alpha)\Big]}_{=0}\cdot\delta\vec\varphi = 0$$

$\forall\delta\vec r\ \forall\delta\vec\varphi$



$$\underbrace{(\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})}_{\text{efektivní síly}}\cdot\delta\vec x^T + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k \underbrace{\nabla f_k\cdot\delta\vec x^T}_{=0} + \underbrace{(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^T\cdot\delta\vec x^N}_{=0} + \underbrace{\left[(\vec F-\mathbb{M}\ddot{\vec x})^N+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\nabla f_k\right]}_{=0 \text{ volbou } \lambda_k}\cdot\delta\vec x^N = 0$$

Virtuální práce efektivních sil

$$\delta A_{ef}(\vec x,\dot{\vec x},\ddot{\vec x},t) = (\vec F(\vec x,\dot{\vec x},t) - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x$$

d'Alembertův princip (1743)

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta A_{ef} = (\vec F - \mathbb{M}\ddot{\vec x})\cdot\delta\vec x = 0 \quad \forall\delta\vec x\in\mathbb{R}^{3N}\\ &f_k(\vec x,t) = 0 \quad \forall k\in\hat r \qquad \delta\vec x\cdot\nabla f_k = 0\end{aligned}}$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{ef}(\vec x(t),\dot{\vec x}(t),\ddot{\vec x}(t),t) = 0$.

Pozn: výhoda—není třeba pracovat se silama ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec x_\alpha = \vec r + \vec r_\alpha$ $|\vec r_\alpha| = konst$ $\delta\vec x_\alpha = \underbrace{\delta\vec r} + \underbrace{\delta\vec\varphi}\times\vec r_\alpha$

jsou nezávislé

$$\delta A_{ef} = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)\cdot\delta\vec x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)\cdot(\delta\vec r+\delta\vec\varphi\times\vec r_\alpha) = \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha\right]}_{=0}\cdot\delta\vec r + \underbrace{\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\vec r_\alpha\times(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha)\right]}_{=0}\cdot\delta\vec\varphi = 0$$

$$\forall\delta\vec r\ \forall\delta\vec\varphi$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha = \vec F - \dot{\vec P} \qquad 0 = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec x_\alpha\times(\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha) - \vec r\times\overbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec F_\alpha - m_\alpha\ddot{\vec x}_\alpha\right)} = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec x_\alpha\times\vec F_\alpha - \dot{\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec x_\alpha\times m_\alpha\dot{\vec x}_\alpha\right)} = \vec N - \dot{\vec L}$$