1 Einsteinovo sumační pravidlo, symboly a derivace

Cvičení 1.1 *Rozhodněte, které indexy jsou v následujícím výrazu volné a které sčítací a doplňte značky sumace* $A_{ij}x_j + B_{ij}C_{jk}y_k + D_{ll}x_k y_k z_i + \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} + x_i y_j^2$

Cvičení 1.2 *Spočtěte* $\delta_{ij}x_j$, δ_{ii}, $\delta_{ij}\delta_{jk}$ *a* $\delta_{jk}\epsilon_{ijk}$.

Cvičení 1.3 *Zapište pomocí Einsteinova sumačního pravidla a symbolů vzorce pro součin matic* $(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij}$, *skalární součin* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *a vektorový součin* $(\vec{a}\times\vec{b})_i$ *vektorů* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ *a determinant matice* $\mathbb{A}\in\mathbb{R}^{3,3}$.

Cvičení 1.4 *Dokažte vzorec* $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

Cvičení 1.5 *Dokažte identitu* $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Cvičení 1.6 *Derivování složené funkce více proměnných (řetězové pravidlo). Vysvětlete podrobně schematický vzorec*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

a spočtěte pomocí něj derivace složené funkce $h = f\circ g$, *kde funkce* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *je dána předpisem* $f(\vec{y}) = f(y_1,y_2) = y_1 y_2^2$ *a zobrazení* $\vec{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *vzorci* $g_1(\vec{x}) = g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + 3x_2$ *a* $g_2(\vec{x}) = g_2(x_1,x_2) = x_1 x_2^2$.

Cvičení 1.7 *Dokažte Eulerovu větu pro homogenní funkce stupně* $k\in\mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}x_i = kf(\vec{x}).$$

Funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *se nazývá homogenní stupně* $k\in\mathbb{N}$, *pokud pro libovolné* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *platí* $f(\lambda\vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x})$, $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

Cvičení 1.8 *Dokažte, že pro sféricky symetrické skalární pole* $\varphi = \varphi(r)$, *kde* $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{3} x_l^2}$ *platí* $\Delta\varphi(r) = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$

Cvičení 1.9 *Řešte jednoduché diferenciální rovnice*
(1) $y' = f(x)$, *(2)* $y' = f(y)$, *(3)* $y'' = f(x)$, *(4)* $y'' = f(y')$, *(5)* $y'' = f(y)$,
kde $y = y(x)$ *a* f *je libovolná spojitá funkce.*

Cvičení 1.10 **Dokažte, že každá funkce* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *jejíž primitivní funkce* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je omezená, má střední hodnotu* $\langle f\rangle = \lim\limits_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$ *rovnou nule.*

Cvičení 1.11 **Dokažte* **větu o viriálu (1870 Rudolf Clausius)**: *Pro systém* N *částic s hmotnostmi* m_α, $\alpha\in\widehat{N}$ *označme*

$$G = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{r}_\alpha, \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}m_\alpha\vec{v}_\alpha^{\,2},$$

pak pro každé řešení Newtonových pohybových rovnic $m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \ \forall \alpha \in \widehat{N}$ paltí

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha \right\rangle,$$

kde $\langle \ \rangle$ značí časovou střední hodnotu. Viriálem nazýváme pravou stranu rovncie.

Cvičení 1.12 **Jak zní věta o viriálu pro soustavu částic, které se pohybují v omezené části prostoru omezenými rychlostmi, jsou-li všechny síly působící v soustavě potenciální a jejich potenciály jsou homogenní funkce stupně k.*

Cvičení 1.13 **Věta o viriálu pro magnetické pole: Odvoďte vztah mezi střední časovou hodnotou kinetické a potenciální energie pro soustavu nabitých částic v homogenním magnetickém poli o indukci $\vec{B}$. Předpokládejte, že pohyb částic probíhá v omezené oblasti prostoru omezenými rychlostmi, částice mají stejnou hmotnost m, stejný náboj q a potenciální energie U je homogenní funkcí stupně k v souřadnicích.*

Cvičení 1.14 **Co říká věta o viriálu pro lineární harmonický potenciál a pro Coulombické pole?*

Cvičení 1.15 **Dokažte vztah $[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})]_i = A_j B_i C_j - A_j B_j C_i$, uvažujte, že složky vektorů $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ nekomutují.*

Cvičení 1.16 **Dokažte, že pro libovolné $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ platí $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.*

2 Lagrangeova funkce

Cvičení 2.1 *Ukažte, že Lorentzovu sílu $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = e\Big(\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)\Big)$ lze získat ze zobecněného potenciálu $U(\vec{x}, \vec{v}, t) = e\Big(\varphi(\vec{x}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)\Big)$, kde φ a $\vec{A}$ jsou potenciály elektromagnetického pole, pro které platí*

$$\vec{E} = -grad\, \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = rot\, \vec{A}.$$

Cvičení 2.2 *Najděte složky rychlosti ve sférických a cylindrických souřadnicích. Spočtěte příslušné Jacobiány*

$$det\, \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial q_k}$$

pro přechod ke sférickým souřadnicím $\hat{x}_j = \hat{x}_j(r, \theta, \varphi)$ a cylindrickým souřadnicím $\hat{x}_j = \hat{x}_j(R, \varphi, z)$ v $\mathbb{R}^3$. O čem vypovídá (ne)nulovost Jacobiánu?

Cvičení 2.3 *Napište Lagrangeovu funkci volného (žádné vazby) bezsilového (žádné síly) hmotného bodu v souřadnicích (a) kartézských (b) sférických (c) cylindrických.*

Cvičení 2.4 *Napište Lagrangeovu funkci volného hmotného bodu, na který působí homogenní gravitační pole a elastická centrální izotropní síla. Sestavte pomocí ní pohybové rovnice.*

Cvičení 2.5 *Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla s pružným závěsem tuhosti k a délky l (délka nezatížené pružiny). Zkoumejte limitu $k/m \longrightarrow +\infty$ jako přechod k ideální holonomní vazbě.*

Cvičení 2.6 **Určete jak se liší Lagrangeovy funkce pro nabitý hmotný bod v elektromagnetickém poli pro elektromagnetické potenciály lišící se o kalibrační transformaci ($\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda(\vec{r}, t)$, $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}$) a ukažte, že tento rozdíl nemá vliv na Lagrangeovy rovnice.*

3 Vazby, vazbové síly, stupně volnosti a obecné souřadnice

Cvičení 3.1 *Jednostranná neudržující vazba: Hmotný bod je položen na svislou kružnici v těsné blízkosti nejvyššího bodu kružnice. Odtud začne vlivem tíže klouzat (bez tření) s nulouvou počáteční rychlostí. Kdy tento bod opustí kružnici?*
Návod: Napsat Lagrangeovy rovnice 1. druhu, dvakrát derivovat vazbu, vyjádřit Lagrangeův multiplikátor, dosadit za rychlost ze ZZE a zjistit kdy je multiplikátor nula.

Cvičení 3.2 *Určete konfigurační prostor a obecné souřadnice dvojitého rovinného matematického kyvadla s délkami závěsů l_1 a l_2.*

Cvičení 3.3 *Dva body v prostoru jsou spojeny nehmotnou tyčkou měnící se délky $l = l(t)$. Zapište tuto vazbu. Určete počet stupňů volnosti a najděte obecné souřadnice pro tuto soustavu. Určete vazbové síly. Spočtěte rychlosti pomocí obecných rychlostí a obecných souřadnic a ověřte pravidlo krácení teček $\frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}$.*

Cvičení 3.4 *Určete počet stupňů volnosti a najděte obecné souřadnice pro hmotný bod vázaný na elipsu, která rotuje kolem své vedlejší poloosy s konstantní rychlostí ω. Návod: hmotný bod je podroben vazbám $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ a $x \sin(\omega t) - y cos(\omega t) = 0$.*

Cvičení 3.5 **Ukažte, že pro rheonomní holonomní vazby $f_K(\vec{x}, t) = 0, \quad k = 1, \ldots, r$ platí*

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = 0.$$

Cvičení 3.6 **Ukažte, že tenký kotouč valící se bez prokluzování a bez naklánění po vodorovné rovině je podroben neholonomní vazbě.*

4 Lagrangeova funkce a Lagrangeovy rovnice (2. druhu)

Cvičení 4.1 *Hmotný bod hmotnosti m klouže bez tření po kruhovém kuželi svisle stojícím na špici v homogenním tíhovém poli intenzity $\vec{g}$. Sestavte jeho Lagrangeovu funkci a příslušné Lagrangeovy rovnice. *Diskutujte případ obecné holonomní vazby na rotační plochu $R = R(z)$.*

Cvičení 4.2 *Po ose x může klouzat bez tření těleso hmotnosti m_1. To je spojeno nehmotnou tyčí délky l s tělesem hmotnosti m_2, které koná působením tíže kmitavý pohyb ve svislé rovině x, y. Pomocí Lagrangeovy funkce sestavte Lagrangeovy rovnice. *Dokažte, že těleso m_2 se pohybuje po elipse a vypočítejte dobu kmitu T tohoto eliptického kyvadla pro malé amplitudy.*

Cvičení 4.3 *Dva stejně těžké hmotné body jsou vázány na parabolu o rovnici $y + x^2 = 0$ a spojeny nehmotným lankem délky $l > 1$, které prochází ohniskem paraboly a je vždy natažené. Soustava je v homogenním tíhovém poli intenzity $\vec{g} = (0, -g)$. Sestavte Lagrangeovy rovnice v obecných souřadnicích.*

Cvičení 4.4 *Po vodorovné rovině se může pohybovat bez tření homogenní válec poloměru R a hmotnosti M. Homogenní tyč hmotnosti m a délky l se opírá o válec tak, že svislá rovina proložená tyčí je kolmá k ose válce. Soustava je umístěna v homogenním tíhovém poli intenzity $\vec{g}$. Určete obecné souřadnice pro tuto soustavu a Lagrangeovu funkci, za předpokladu, že tyč je tečnou k válci a nedochází mezi nima k tření.*

Cvičení 4.5 *Najděte obecné souřadnice a Lagrangeovy funkce pro soustavy na obrázku. Soustavy jsou tvořeny ze dvou homogenních tuhých tyčí délky l, které jsou navzájem spojeny kloubem. Konec první tyče je vázán na počátek a konec druhé tyče je vázán na osu x a spojen ideální pružinou s nehybným bodem na ose x ležícím ve vzdálenosti d od počátku.*

Cvičení 4.6 **Odvoďte pohybovou rovnici pro matematické kyvadlo, jehož délka závěsu roste lineárně s časem podle vztahu $l(t) = l_0(1 + kt)$, kde l_0, k jsou kladné konstanty.*

Cvičení 4.7 **Hmotný bod v rovině (x, y) je vázán na kružnici o poloměru R, jejíž střed koná kmitavý pohyb po ose y s amplitudou R, tj. bod je podroben vazbě*

$$x^2 + (y - R\cos\Omega t)^2 - R^2 = 0,$$

kde Ω a R jsou konstanty. Hmotný bod je po kružnici k volně pohyblivý a nepůsobí na něj žádná skutečná síla. Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte jeho pohybovou rovnici.

Cvičení 4.8 **Ukažte že tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu je invariantní vůči záměně obecných souřadnic, t.j. pokud platí*

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\hat{L}(q, \dot{q}, t)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\hat{L}(q, \dot{q}, t) = Q_j^{(o)}(q, \dot{q}, t) := \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(o)} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}, \tag{1}$$

a $q_j = \hat{q}_j(q'_1, \ldots, q'_s, t)$ pak platí (1), kde $q \mapsto q'$, $\dot{q} \mapsto \dot{q}'$,

Cvičení 4.9 **Ukažte, že se tvar Lagrangeových rovnic 2. druhu nezmění pokud se Lagrangeova funkce změní o totální derivaci funkce souřadnic a času, t.j. pokud $\hat{L}'(q, \dot{q}, t) = \hat{L}(q, \dot{q}, t) + G(q, \dot{q}, t)$, kde $G(q, \dot{q}, t) = \frac{\hat{d}}{dt}g(q, t)$.*

Cvičení 4.10 **Najděte výraz pro obecnou hybnost a obecnou energii nabité částice v elektromagnetickém poli z Lagrangeovy funkce $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q[\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)]$*

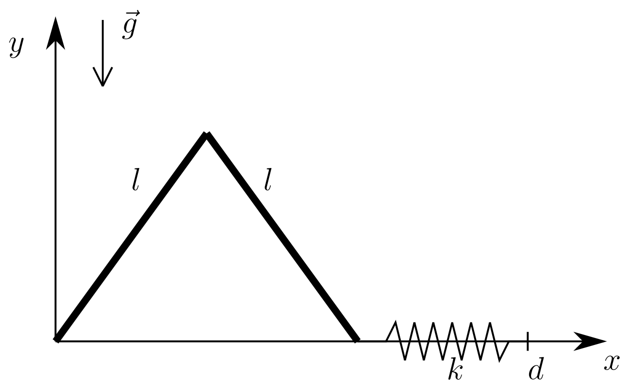
Cvičení 4.11 **Jak se změní obecná hybnost a obecná energie při změně Lagrangeovy funkce o $\frac{\hat{d}}{dt}g(q, t)$?*

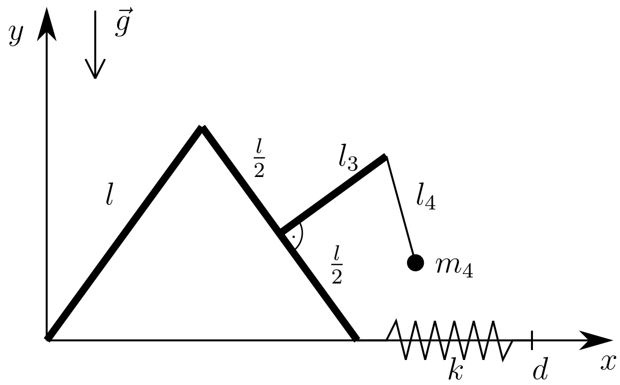
5 Malé kmity

Cvičení 5.1 *Kruhový kotouč poloměru R a hmotnosti M se může valit bez klouzání po vodorovné rovině. Těžiště kotouče T leží ve vzdálenosti e od jeho středu. Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose kolmé na jeho rovinu a procházející těžištěm je I_T. Vychýlíme–li kotouč z rovnovážné polohy, vykonává kolem ní vlivem tíže periodický pohyb. Určete dobu kmitu tohoto pohybu při malých výchylkách.*

Cvičení 5.2 *Určete kmity soustavy dvou lineárních harmonických oscilátorů spojených slabou ($0 < \alpha << \omega_0^2$) bilineární vazbou popsané Lagrangeovou funkcí $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(x^2 + y^2) + \alpha xy$.*

Cvičení 5.3 *Najděte úhlové frekvence malých kmitů dvojitého rovinného fyzického kyvadla tvořeného dvěma homogeními tuhými tyčemi s délkami l_1, l_2 a hmotnostmi m_1, m_2. *Najděte normální souřadnice.*





6 Integrály pohybu, Teorém Noetherové

Cvičení 6.1 *Dokažte, že funkce $F_1(x, \dot{x}, t) = \dot{x} + gt$ a $F_2(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 + 2gx$ jsou první integrály rovnice $\ddot{x} + g = 0$, kde $g = konst.$ Vypočítejte pomocí nich trajektorii $x = x(t)$.*

Cvičení 6.2 *Najděte cyklické souřadnice a integrály pohybu pro systém popsaný Lagrangeovou funkcí $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3$. Přepište tuto funkci do cylindrických souřadnic a opět nalezněte cyklické souřadnice a integrály pohybu. Ukažte, nalezený integrál pohybu je třetí složka momentu hybnosti zapsaná v cylindrických souřadnicích*

Cvičení 6.3 *Najděte integrály pohybu pro nabitou částici s nábojem e a hmotností m v homogenním magnetickém poli o indukci $\vec{B} = (0, 0, B)$ s vektorovým potenciálem*

(a) $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$

(b) $\vec{A} = (0, Bx_1, 0)$.

Nalezené výsledky porovnejte a případný rozpor vysvětlete.

Cvičení 6.4 *Které složky celkové hybnosti $\vec{P}$ a celkového momentu hybnosti $\vec{L}$ soustavy částic se zachovávají v silovém poli $U = U(x, y, z)$ jehož ekvipotenciální plochy jsou*

a) roviny kolmé k ose z

b) válcové plochy s osou z

c) kulové plochy se středem v počátku

d) $U = U_1 + U_2$, kde U_1, U_2 mají vlastnost c), ale s různými středy symetrie ležícími na ose z.

Cvičení 6.5 *Ukažte, že při pohybu částice v poli $U = \frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha \neq 0$, existuje vektorový integrál pohybu $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + \alpha\frac{\vec{r}}{r}$, nazývaný Runge–Lenzův vektor, který je specifický právě pro toto pole.*

Cvičení 6.6 *Užitím integrálů pohybu nalezněte tvar trajektorie částice v poli $U = \frac{\alpha}{r}$.*

Cvičení 6.7 **Dokažte, že funkce $F_1(x, \dot{x}, t) = -\omega t + \mathrm{arctg}(\frac{\omega x}{\dot{x}})$ a $F_2(x, \dot{x}, t) = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2$, jsou integrály pohybu pro systém s pohybovou rovnicí $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kde $\omega > 0$ je konstanta. Vypočtěte pomocí nich trajektorii $x = x(t)$.*

Cvičení 6.8 **Ukažte, že pokud Lagrangeova funkce nezávisí na čase (izolovaná soustava), obecná energie*

$$E = E(q,\dot{q}) := \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q}) - L(q,\dot{q}).$$

je integrálem pohybu.

Cvičení 6.9 **Nechť Lagrangeova funkce má tvar*

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U\left((x_1^2 + x_2^2), x_3\right).$$

Ukažte, že vektorové pole $\vec{Y}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)$ splňuje

$$\sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial L}{\partial x_j} Y_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \right] = 0,$$

Napište odpovídající zachovávající se veličinu.

Cvičení 6.10 **Nechť Lagrangeova funkce má tvar (volný hmotný bod na přímce)*

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Ukažte, že pohybové rovnice jsou invariantní vůči "škálování"$x \mapsto x\, e^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, Jak vypadá vektorové pole Y pro tuto grupu transformací? Je $F(x,\dot{x},t)$ dané vztahem

$$F(x,\dot{x},t) = \sum_{j=1}^{s} Y_j(x,t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} L(x,\dot{x},t)$$

integrálem pohybu?

7 Princip virtuální práce a d'Alembertův princip

Cvičení 7.1 *Pomocí principu virtuální práce odvoďte podmínky pro rovnováhu na páce.*

Cvičení 7.2 *Pomocí principu virtuální práce najděte rovnovážnou polohu pro homogenní tuhou tyč délky l hmotnosti m v homogenním tíhovém poli intenzity g, která je ve svislé rovině podepřena hranou stolu a opřena o svislou stěnu vzdálenou od hrany stolu o $a < l/2$. Vazby považujte za ideální.*

Cvičení 7.3 **Odvoďte podmínky pro reálná a virtuální posunutí pro hmotný bod pohybující se po trojosém elipsoidu, jehož osy jsou závislé na čase*

Cvičení 7.4 **Jak se bude v rovině xy pohybovat částice, na kterou nepůsobí žádné síly, je-li podrobena neholonomní vazbě $\alpha t\dot{x} - \dot{y} = 0$.*

8 Variační počet

Cvičení 8.1 *Po jaké dráze mezi dvěma body ve svislé rovině xy se pohybuje včela, která se snaží dosáhnout cíle za nejkratší možnou dobu? Předpokládejte, že její rychlost je úměrná výšce,* $v = ky,\ k > 0,\ y > 0,\ x_1 \neq x_2$.

Cvičení 8.2 *Určete polohu těžkého homogenního vlákna pod vlivem tíže. Návod: Mezi všemi rovinnými křivkami délky* $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx = l$ *jejichž konce leží v daných bodech* $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, *najděte ty, jejichž svislá souřadnice těžiště* $y_{CM} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{l}\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$ *je minimální.*

Cvičení 8.3 **Úloha o brachistochroně. Najděte rovinnou křivku spojující dva body A, B ve svislé rovině, tak aby hmotný bod vypuštěný s nulovou počáteční rychlostí z bodu A a pohybující se po této křivce vlivem tíže, dosáhl bodu B za nejkratší dobu.*

9 Hamiltonova funkce a Hamiltonovy rovnice

Cvičení 9.1 *Odvoďte Hamiltonovy rovnice přímo výpočtem derivací* $\frac{\partial H}{\partial q_j}, \frac{\partial H}{\partial p_j}$.

Cvičení 9.2 *Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu v poli konzervativních sil (v kartézských souřadnicích) a ukažte, že získané rovnice jsou ekvivalentní s rovnicemi Newtonovými.*

Cvičení 9.3 *Napište Hamiltonovu funkci lineárního harmonického oscilátoru.*

Cvičení 9.4 *Napište Hamiltonovu funkci a sestavte Hamiltonovy rovnice částice s nábojem e a hmotností m v daném vnějším elektromagnetickém poli s potenciály* $\varphi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$.

Cvičení 9.5 *Napište Hamiltonovu funkci volného hmotného bodu v kartézských, sférických a cylindrických souřadnicích v poli* $U(\vec{x})$.

Cvičení 9.6 *Sestavte Hamiltonovy rovnice pro pohyb volného hmotného bodu pod vlivem centrální síly s potenciálem* $U(r)$ *ve sférických souřadnicích. Určete integrály pohybu.*

Cvičení 9.7 *Hmotný bod m je vázán na válcovou plochu* $x^2 + y^2 = R^2$ *a pohybuje se po ní pod vlivem centrální elastické síly* $\vec{F} = -k\vec{r}$. *Najděte Hamiltonovu funkci, sestavte Hamiltonovy rovnice a řešte je (v cylindrických souřadnicích).*

10 Poissonovy závorky a integrály pohybu

Cvičení 10.1 *Spočtěte* $\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\}$.

Cvičení 10.2 *Spočtěte* $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$, $\{q_i, p_j\}$.

Cvičení 10.3 *Spočtěte Poissonovy závorky pro složky hybností* p_j *a momentů hybností* $L_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k$ *částice tj.* $\{L_i, p_j\}$ *a* $\{L_i, L_j\}$. *Budou stejné vztahy platit i pro celkovou hybnost a celkový moment hybnosti soustavy částic?*

Cvičení 10.4 *Dokažte, že jsou–li* L_1, L_2 *integrály pohybu, pak i* L_3 *je integrálem pohybu.*

Cvičení 10.5 **Dokažte Poissonovu větu: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.*

Cvičení 10.6 **Pomocí Poissonovy věty odvoďte další první integrál Hamiltonových pohybových rovnic (tj. integrál pohybu) v případě hmotného bodu pod vlivem centrální síly v otáčející se soustavě, znáte–li první integrály:* $u = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} - \Omega \cdot (x_1 p_2 - x_2 p_1) + U(r)$, $v = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} + U(r)$.

Cvičení 10.7 **Ukažte, že* $\{L_3, F\} = 0$, *kde* $F = F(\vec{q} \cdot \vec{p})$ *je libovolná (dostatečně hladká) skalární funkce souřadnic a hybností částice.*

Cvičení 10.8 **Ověřte, že složky momentu hybnosti* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *a Runge–Lenzova vektoru* $\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} + \alpha \frac{\vec{r}}{r}$ *splňují vztahy:* $\{L_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k$, $\{A_i, A_j\} = -2H\varepsilon_{ijk} L_k$, *kde* $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$.

Cvičení 10.9 **Ukažte, že pro volnou částici s nábojem e v magnetickém poli* $\vec{B}(\vec{x}, t)$ *platí* $\{m\dot{x}_i, m\dot{x}_j\} = e\varepsilon_{ijk} B_k$. *Návod: V Hamiltonově formalizmu jsou rychlosti* $\dot{x}_i$ *funkce na fázovém prostoru tj. závisí na proměnných* $\vec{x}, \vec{p}, t$.

11 Kanonické transformace

Cvičení 11.1 *Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi a)* $F_2 = \sum_k q_k P_k$, *b)* $F_2 = \sum_k f_k(\vec{q}, t) P_k$, *c)* $F_1 = \sum_k q_k Q_k$.

Cvičení 11.2 *Ukažte, že transformace* $Q_j = p_j$, $P_j = -q_j$ *je kanonická.*

Cvičení 11.3 *Ukažte, že kanonická transformace* $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \longrightarrow (R, \varphi, z, P_R, P_\varphi, P_z)$ *definovaná vytvořující funkcí* $F_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} P_R + \mathrm{arctg}(\frac{x_2}{x_1}) P_\varphi + x_3 P_z$ *převádí souřadnice kartézské na cylindrické.*

Cvičení 11.4 *Ukažte, že transformace* $Q = \mathrm{arctg}(\sqrt{km}\frac{q}{p})$, $P = \frac{1}{2}(\sqrt{km} q^2 + \frac{p^2}{\sqrt{km}})$ *je kanonická. Najděte pro ni vytvořující funkci 1. druhu. Užijte tuto transformaci k řešení pohybových rovnic harmonického oscilátoru* $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$. *Jaký fyzikální význam mají nové proměnné* Q *a* P*?*

Cvičení 11.5 *Uvažujte transformaci* $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$ $Q = q^\alpha \cos(\beta p)$, $P = q^\alpha \sin(\beta p)$. *Pro která* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *je tato transformace kanonická? Najděte příslušnou vytvořující funkci.*

12 Hamilton–Jacobiho Rovnice a Hlavní funkce Hamiltonova

Cvičení 12.1 *Řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro bezsilový volný hmotný bod popsaný Hamiltonovnou funkcí* $H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m}$. *Ukažte, že Hamilton–Jacobiho rovnice pro vytvořující funkce typu* F_1 *resp.* F_2 *mají řešení (úplné integrály) tvarů* $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^{3} (q_i - Q_i)^2$ *a* $S_2(q_i, t, P_i) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i^2}{2m} t + \sum_{i=1}^{3} P_i q_i$.

Cvičení 12.2 *Zkonstruujte hlavní funkci Hamiltonovu* $S_1(q_i, t, Q_i) = \frac{m}{2t} \sum_{i=1}^{3} (q_i - Q_i)^2$ *integrací Lagrangeovy funkce* $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m\dot{q}_i^2$ *od 0 do t po skutečné trajektorii bezsilového hmotného bodu* $q_i = Q_i + v_i t$.

Cvičení 12.3 *Najděte kanonické transformace určené vytvořujícími funkcemi* $S_1(q_i,t,Q_i) = \frac{m}{2t}\sum_{i=1}^{3}(q_i - Q_i)^2$ *a* $S_2(q_i,t,P_i) = -\sum_{i=1}^{3}\frac{P_i^2}{2m}t + \sum_{i=1}^{3}P_i q_i$*. Jaký geometrický tvar mají příslušné vlnoplochy* $S = konst$ *v konfiguračním prostoru?*

Cvičení 12.4 *Napište a řešte Hamilton–Jacobiho rovnici pro lineární harmonický oscilátor* $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$*. Zkonstuujte příslušnou kanonickou transforaci a najděte fázové trajektorie.*

Cvičení 12.5 **Ukažte, že funkce* $S(q,t,Q) = m\omega\frac{(q^2+Q^2)\cos(\omega t) - 2qQ}{2\sin(\omega t)}$ *je při* $0 < t < \pi$ *úplným integrálem Hamilton–Jacobiho rovnice pro harmonický oscilátor* ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$)*. Najděte pomocí ní fázové trajektorie.*

13 Integrabilí soustavy a Teorém Noetherové

Cvičení 13.1 *Uvažujte soustavu o s stupních volnosti, jejímž fázovým prostorem je* $\mathbb{R}^{2s}$ *(nebo jeho otevřená podmnožina) a jejíž Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase. Ukažte, že taková soustava může mít nanejvýš* $2s-1$ *navzájem nezávislých integrálů pohybu, které nezávisí explicitně na čase.*

Cvičení 13.2 *Definice integrabilní soustavy. Liovilleova věta*

Cvičení 13.3 *Todova Molekula. Ukažte, že lineární tříatomová molekula s Hamiltoniánem* $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{q_1-q_2} + e^{q_2-q_3} + e^{q_3-q_1}$ *je integrabilní soustava. Návod: zkoumejte první integrály* H, $P = p_1 + p_2 + p_3$, $K = \frac{1}{9}(p_1+p_2-2p_3)(p_2+p_3-2p_1)(p_3+p_1-2p_2) + (p_1+p_2-2p_3)e^{q_1-q_2} + (p_2+p_3-2p_1)e^{q_2-q_3} + (p_3+p_1-2p_2)e^{q_3-q_1}$.

Cvičení 13.4 *Ukažte, že veličina* $L_3 = q_1p_2 - q_2p_1$ *je generátorem rotace.*

Cvičení 13.5 *Na fázovém prostoru soustavy N částic* $\alpha = 1,2,\dots,N$ *se souřadnicemi* $q_{\alpha i}$ *a hybnostmi* $p_{\alpha i}$*, kde* $i = 1,2,3$ *je dána funkce tvaru* $G(q_{\alpha i}, p_{\alpha i}, t) = \sum_\alpha m_\alpha q_{\alpha 1} - \sum_\alpha p_{\alpha 1} t$ *jakožto generátor infinitesimální transformace. Ukažte, že tato funkce generuje speciální Galileiho transformaci (podél 1. osy). Návod: použijte* $\varepsilon = V$.