Diferenciální formy

vek. pr. V nad $\mathbb{R}$, $(e_1,\dots,e_m)$ báze V, $(\varepsilon^1,\dots,\varepsilon^m)$ duální báze V^*, $\varepsilon^i(e_j)=\delta_{ij}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $k\le m$

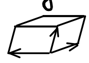
k-tá vnější mocnina pr. V^* je reálný vek. pr. $\Lambda^k(V^*)$ všech (úplně) antisymetrických k-lineárních forem α na V tj. $\alpha:\underbrace{V\times\dots\times V}_{k\text{ krát}}\to\mathbb{R}$ lineárních v každé složce a splňujících $\forall\pi\in S_k\ \ \alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})=\operatorname{sgn}\pi\,\alpha(v_1,\dots,v_k)\ \ \forall v_1,\dots,v_k\in V$

Vnější algebra vek. pr. V^* je vek. pr. $\Lambda V^*=\bigoplus_{k=0}^{m}\Lambda^k(V^*)$ nehomogenních forem spolu s bilineární asociativní operací $\wedge:\Lambda V^*\times\Lambda V^*\to\Lambda V^*$ nazývanou <u>vnější součin</u>, definovanou na homogenních formách $\alpha\in\Lambda^k(V^*)$, $\beta\in\Lambda^l(V^*)$ předpisem
$(\alpha\wedge\beta)(v_1,\dots,v_{k+l})=\frac{1}{k!\,l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\pi\,\alpha(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)})\cdot\beta(v_{\pi(k+1)},\dots,v_{\pi(k+l)})\ \ \forall v_1,\dots,v_{k+l}\in V$ a splňující $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$

$\dim\Lambda^k(V^*)=\binom{m}{k}$ Př. $V=\mathbb{R}^3$ báze: $\Lambda^0(V^*)=\mathbb{R}$ (1); $\Lambda^1(V^*)=V^*$ $(\varepsilon^1,\varepsilon^2,\varepsilon^3)$; $\Lambda^2(V^*)$ $(\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2,\varepsilon^1\wedge\varepsilon^3,\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3)$

$\dim\Lambda V^*=2^m$

$(\vec x\times\vec y)\cdot\vec r=\sum_{\pi\in S_3}\operatorname{sgn}\pi\,x^{\pi(1)}y^{\pi(2)}r^{\pi(3)}=\underbrace{\varepsilon^1\wedge\varepsilon^2\wedge\varepsilon^3}_{\text{báze }\Lambda^3(V^*)}(\vec x,\vec y,\vec r)$ $\quad\varepsilon^i(\vec x)=x^i$



Diferenciální forma stupně k na Γ (k-forma) je zobrazení $\alpha: b\in\Gamma\to\alpha(b)\in\Lambda^k(T_b^*\Gamma)$ které každému $b\in\Gamma$ přiřadí k-lineární antisymetrickou formu na tečném prostoru $T_b\Gamma$ ke Γ v bodě b.

$\Omega^k(\Gamma)$ množina všech k-forem na Γ $\qquad\Omega^0(\Gamma)$ reálné funkce na Γ

Existuje právě jedno lineární zobrazení nazývané <u>vnější derivace</u> $d:\Omega^k(\Gamma)\to\Omega^{k+1}(\Gamma)$ $\ 0\le k\le 2s-1$ s vlastnostmi
1, $\forall f\in\Omega^0(\Gamma)$ je df diferenciál fce. f $\quad$ 2, $d\circ d=0$ $\quad$ 3, $\forall\alpha\in\Omega^k(\Gamma)\ \forall\beta\in\Omega^l(\Gamma)\ \ d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(d\beta)$

<u>Symplektická forma</u> ω na Γ je 2-forma $\omega\in\Omega^2(\Gamma)$ která je uzavřená $(d\omega=0)$ a nedegenerovaná $(\det\omega\neq0)$

Na fázovém prostoru existuje globálně (díky jeho struktuře $\Gamma=T^*M$) kanonická Cartanova 1-forma $\Theta=\sum_{i=1}^{s}p_i dq_i$

$$d\Theta=d(p_i dq_i)=dp_i\wedge dq_i+(-1)^0p_i\wedge d(dq_i)=dp_i\wedge dq_i=\omega=\frac12\sum_{i,j=1}^{2s}\omega_{ij}\,dr_i\wedge dr_j\qquad(\omega_{ij})=\begin{pmatrix}0&-\mathbb{1}_s\\ \mathbb{1}_s&0\end{pmatrix}=\omega$$

Kanoničnost tr. $\vec Q=\vec Q(\vec q,\vec p,t)$, $\vec P=\vec P(\vec q,\vec p,t)$ odpovídá existenci funkce $F(\vec Q,\vec P,t)$ splňující podmínku $p_i dq_i-H\,dt=P_j dQ_j-K\,dt+dF$ vedoucí na kriteria kanoničnosti, která nezávisí na časovém vývoji transformace. Čas lze tedy (při zkoumání kanoničnosti) považovat za parametr, který určuje konkrétní bezčasovou kanonickou tr. z 1-parametrické množiny bezčasových kanonických tr. tvořících dohromady časově závislou kanonickou tr. a kanoničnost tak lze vyšetřovat pro každé pevné t zvlášť, tj. $t=\text{konst}$ $dt=0$ a podmínka přejde na $p_i dq_i=P_j dQ_j+dF$ odkud aplikací vnější derivace získáme $dp_i\wedge dq_i=dP_j\wedge dQ_j+ddF$ což je podmínka zachování symplektické formy

$$dp_i\wedge dq_i=dP_j\wedge dQ_j\qquad\frac12\omega_{ij}\,dr_i\wedge dr_j=\frac12\omega_{kl}\,dZ_k\wedge dZ_l=\frac12\omega_{kl}\left(\frac{\partial Z_k}{\partial r_i}dr_i\right)\wedge\left(\frac{\partial Z_l}{\partial r_j}dr_j\right)=\frac12\frac{\partial Z_k}{\partial r_i}\omega_{kl}\frac{\partial Z_l}{\partial r_j}dr_i\wedge dr_j$$

Kanonické transformace tedy představují symetrie fázového prostoru jakožto symplektické variety (Γ,ω) (tzv. symplektomorfizmy).

Poincaréovy integrální invarianty

Buď $D\subset\Gamma$ podvarieta sudé dimenze $2k$, $k\in\hat{s}$ fázového prostoru (Γ,ω), pak integrály $I^k[D]=\int_D\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{k\text{ krát}}$ jsou invarianty libovolné (aktivní) kanonické transformace $\phi:\Gamma\to\Gamma$ tj. $I^k[\phi(D)]=I^k[D]$

Dk. pouze pro k=1

$$I^1[\phi(D)]=\int_{\phi(D)}\omega=\int_{\phi(D)}dP_i\wedge dQ_i=\int_D\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}dp_j\right)\wedge\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dq_k+\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}dp_k\right)=\int_D\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dq_j\wedge dq_k+\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\underbrace{dq_j\wedge dp_k}_{(-dp_k\wedge dq_j)}+$$

$$+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dp_j\wedge dq_k+\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}dp_j\wedge dp_k=\int_D\frac12[q_k,q_j]_{Q,P}\,dq_j\wedge dq_k+\underbrace{[q_k,p_j]_{Q,P}}_{\delta_{kj}}dp_j\wedge dq_k+\frac12[p_k,p_j]_{QP}\,dp_j\wedge dp_k=\int_D dp_k\wedge dq_k=I^1[D]$$

Pozn. Objem na fázovém prostoru je určen pomocí nenulové 2s-formy, obvykle Liouvilleovy formy objemu

$$\Omega=\frac{1}{s!}(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}\underbrace{\omega\wedge\dots\wedge\omega}_{s\text{ krát}}=dq_1\wedge\dots\wedge dq_s\wedge dp_1\wedge\dots\wedge dp_s=dr_1\wedge\dots\wedge dr_{2s}\qquad V(D)=\int_D\Omega$$

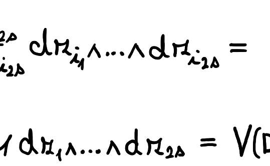
Liouvilleova věta 1) Velikost objemu libovolné oblasti D fázového prostoru Γ se při (aktivní) kanonické transformaci ϕ nemění tj. $V(D)=V(\phi(D))$

2) Při časovém vývoji systému se objem libovolné oblasti fázového prostoru nemění.

Dk. $$V(\phi(D))=\int_{\phi(D)}dZ_1\wedge\dots\wedge dZ_{2s}=\int_D\left(\sum_{i_1=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial r_{i_1}}dr_{i_1}\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_{2s}}{\partial r_{i_{2s}}}dr_{i_{2s}}\right)=\int_D\sum_{i_1,\dots,i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial r_{i_1}}\cdots\frac{\partial Z_{2s}}{\partial r_{i_{2s}}}dr_{i_1}\wedge\dots\wedge dr_{i_{2s}}=$$

$$=\int_D\sum_{i_1,\dots,i_{2s}=1}^{2s}\frac{\partial Z_1}{\partial r_{i_1}}\cdots\frac{\partial Z_{2s}}{\partial r_{i_{2s}}}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&\dots&2s\\ i_1&\dots&i_{2s}\end{pmatrix}dr_1\wedge\dots\wedge dr_{2s}=\int_D\det\left(\frac{\partial\vec Z}{\partial\vec r}\right)dr_1\wedge\dots\wedge dr_{2s}=\int_D 1\,dr_1\wedge\dots\wedge dr_{2s}=V(D)$$

Pozn. Statistická mechanika — na časový vývoj statistického souboru ve fázovém pr. se lze dívat jako na proudění nestlačitelné kapaliny.



Duální povaha pozorovatelných veličin v Hamiltonově formalizmu

I. Pozorovatelné (veličiny) jsou reálné funkce $G:\Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ třídy C^1 na rozšířeném fázovém prostoru.
Stav systému je určen bodem ve fázovém prostoru o souřadnicích $(\vec{q},\vec{p})\in\Gamma$.
Výsledek měření pozorovatelné G v čase t na systém ve stavu $(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ dostaneme dosazením $G(\vec{q}(t),\vec{p}(t),t)$.

II. Pozorovatelná G je generátorem jednoparametrické grupy kanonických transformací fázového prostoru.

Pozorovatelná $G\in\Omega^0(\Gamma)$ | 1-forma $dG\in\Omega^1(\Gamma)$ | Hamiltonovské vektorové pole X_G

$$G:\Gamma\to\mathbb{R},\quad G=G(\vec{q},\vec{p})\ \xmapsto[\text{vnější derivace}]{d}\ dG=\frac{\partial G}{\partial q_i}\underbrace{dq_i}+\frac{\partial G}{\partial p_i}\underbrace{dp_i}\ \xmapsto[\text{symplektická forma}]{\omega}\ X_G=\frac{\partial G}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i}}-\frac{\partial G}{\partial q_i}\underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}}=\{\,.\,,G\}\qquad \vec{X}_G=\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial p_i}\\ -\frac{\partial G}{\partial q_i}\end{pmatrix}$$

vypočtené v b jsou bází $T^*_b\Gamma$ — vypočtené v bodě b jsou bazické vektory $T_b\Gamma$

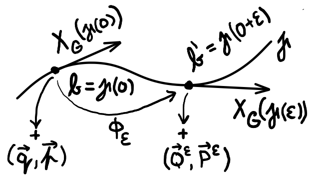
Integrální křivka vektorového pole

$$\gamma:\mathbb{R}\to\Gamma\qquad \gamma'(\varepsilon)=\frac{d\gamma}{d\varepsilon}=X_G(\gamma(\varepsilon))\qquad \frac{dq_i}{d\varepsilon}=\frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\gamma=\gamma(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\vec{q}(\varepsilon)\\ \vec{p}(\varepsilon)\end{pmatrix}\qquad \frac{dp_i}{d\varepsilon}=-\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

její tečný vektor je v každém bodě shodný s vektorem pole

Difr: Každým bodem oblasti $\Gamma\times\mathbb{R}$ prochází právě jedna charakteristika (neprodloužitelné řešení) $\gamma:(a,b)\to\Gamma$. Tedy v každém bodě $\Gamma=\Gamma\times\{0\}$ „začíná" právě jedna integrální křivka.



(lokální) tok generovaný polem X_G

$$\phi_\varepsilon:\Gamma\to\Gamma\qquad b\in\Gamma\qquad b=\gamma(0)\to\phi_\varepsilon(b)=\gamma(0+\varepsilon)$$

$$\varepsilon\in(-a,a)\subset\mathbb{R}\qquad \phi_\varepsilon:(\vec{q}(0),\vec{p}(0))\to(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))$$

Tok je lokální, pokud $\phi:\varepsilon\in(-a,a)\subset\mathbb{R}\to\phi_\varepsilon$ nejde roztáhnout na celé $\mathbb{R}$.

Vlastnosti toku

$\phi_0=Id_\Gamma$ identita

$\phi_\varepsilon\circ\phi_\lambda=\phi_{\varepsilon+\lambda}$

$\phi_\varepsilon^{-1}=\phi_{-\varepsilon}$

Pokud je tok definovaný na celém $\mathbb{R}$ pak představuje jednoparametrickou grupu kanonických transformací.

(aktivní) transformace daná tokem ϕ_ε

$$Q_i^\varepsilon(\vec{q},\vec{p})=q_i(\varepsilon)=\left(\phi_\varepsilon(\vec{q},\vec{p})\right)_i\qquad \forall i\in\hat{s}\qquad \vec{q}(0)=\vec{q}$$

$$P_i^\varepsilon(\vec{q},\vec{p})=p_i(\varepsilon)=\left(\phi_\varepsilon(\vec{q},\vec{p})\right)_{s+i}\qquad \vec{p}(0)=\vec{p}$$

Infinitesimální verze transformace (Taylor v 0 do 1. řádu v ε)

$$Q_i^\varepsilon=q_i(0+\varepsilon)=q_i(0)+\varepsilon\left.\frac{dq_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}(\vec{q},\vec{p})$$

$$P_i^\varepsilon=p_i(0+\varepsilon)=p_i(0)+\varepsilon\left.\frac{dp_i}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=p_i-\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}(\vec{q},\vec{p})$$

Kanoničnost infinitesimální transformace (podmínka musí platit do 1. řádu v ε)

$$\{Q_i^\varepsilon,P_j^\varepsilon\}=\{q_i,p_j\}+\varepsilon\left\{\frac{\partial G}{\partial p_i},p_j\right\}-\varepsilon\left\{q_i,\frac{\partial G}{\partial q_j}\right\}-\varepsilon^2\left\{\frac{\partial G}{\partial p_i},\frac{\partial G}{\partial q_j}\right\}=\delta_{ij}+\varepsilon\{\{q_i,G\},p_j\}-\varepsilon\{q_i,\{G,p_j\}\}-\sigma(\varepsilon^2)=$$

$$=\delta_{ij}+\varepsilon\left(\{\{q_i,G\},p_j\}+\{\{G,p_j\},q_i\}\right)-\sigma(\varepsilon^2)\underset{\text{Jacobiho id.}}{=}\delta_{ij}-\varepsilon\{\underbrace{\{p_j,q_i\}}_{-\delta_{ij}},G\}-\sigma(\varepsilon^2)=\delta_{ij}+\underbrace{\{\delta_{ij},G\}}_{0}-\sigma(\varepsilon^2)=\delta_{ij}-\sigma(\varepsilon^2)$$

$$\{Q_i^\varepsilon,Q_j^\varepsilon\}=\sigma(\varepsilon^2)=\{P_i^\varepsilon,P_j^\varepsilon\}\qquad\forall i,j\in\hat{s}$$

Konečnou tr. lze získat složením (integrací) infinitesimálních tr. a neboť složení dvou kanonických tr. je kanonické bude i tato tr. kanonická. Pro infinitesimální tr. existuje i vytvořující fce. $F_2(\vec{q},\vec{P})=q_jP_j+\varepsilon G(\vec{q},\vec{P})$

Př. $G=p_1$, $dG=1\cdot dp_1$, $s=2$, (q_1,q_2,p_1,p_2)

$dp_i\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial q_i}$, $dq_i\leftrightarrow-\frac{\partial}{\partial p_i}$

$X_G=1\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}$, $\vec{X}_G=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\frac{dq_1}{d\varepsilon}=1$, $q_1(\varepsilon)=\int 1\cdot d\varepsilon+C=\varepsilon+q_1(0)$

$\frac{dq_2}{d\varepsilon}=0$, $q_2(\varepsilon)=q_2(0)$, $\frac{dp_i}{d\varepsilon}=0$, $p_i(\varepsilon)=p_i(0)$, $i=1,2$

$Q_1=q_1+\varepsilon$, $P_1=p_1$, $Q_2=q_2$, $P_2=p_2$

funkce $G=p_1$ je generátorem translace

Teorém Noetherové v Hamiltonově formalizmu

Nechť fce. $F=F(\vec{q},\vec{p})$ a Hamiltonova fce. $H=H(\vec{q},\vec{p})$ nezávisí na čase, pak F je I.P. $\iff\{F,H\}=0$

1) F je generátorem 1-param. grupy tr. $(\vec{q},\vec{p})\to(\vec{Q}^\varepsilon,\vec{P}^\varepsilon)=(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))$

$$H(\vec{Q}^\varepsilon,\vec{P}^\varepsilon)=\hat{H}(\vec{q},\vec{p},\varepsilon)=H(\vec{q}(\varepsilon),\vec{p}(\varepsilon))\underset{\text{invariance H}}{=}H(\vec{q}(0),\vec{p}(0))\qquad 0=\frac{\partial\hat{H}}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\varepsilon}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{d\varepsilon}=\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}=\{H,F\}$$

2) H je generátorem časového vývoje $(\vec{q},\vec{p})\to(\vec{Q}^t,\vec{P}^t)=(\vec{q}(t),\vec{p}(t))$ $\quad F(\vec{q}(t),\vec{p}(t))=F(\vec{q}(0),\vec{p}(0))\quad 0=\left.\frac{dF}{dt}\right|_{H.R.}=\{F,H\}$

Hamiltonián H je invariantní vůči 1-param. grupě tr. generované funkcí F (tj. H se zachovává podél integrálních křivek vek. pole X_F) $\iff$ F je invariantní vůči 1-param. grupě tr. generované Hamiltoniánem představující časový vývoj (tj. zachovává se podél integrálích křivek vek. pole X_H (fázových trajektorií) a je tedy integrálem pohybu). Tedy i ke každému IP. existuje 1-param. grupa symetrií Hamiltonovy fce.