Noether's theorem (1915) spojité symetrie $\rightarrow$ zákony zachování

"Ke každé jednoparametrické grupě tranosformací konfiguračního prostoru které ponechávají Lagrangeovu funkci invariantní (symetrie Lagr. fce.) existuje integrál pohybu."

Grupou G je každá neprázdná množina spolu s operací (součin) $\cdot : G\times G \rightarrow G$ splňující:

1, $\forall a,b,c\in G \quad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ asociativita

2, $\exists e\in G\ \forall a\in G \quad a\cdot e = e\cdot a = a$ jednotka

3, $\forall a\in G\ \exists_1 a^{-1}\in G \quad a^{-1}\cdot a = a\cdot a^{-1} = e$ inverzní prvek

Př. $(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{R}/\{0\},\cdot)$

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \middle| \varepsilon\in\mathbb{R} \right\}$$

Transformace (aktivní) $\phi^\varepsilon \in \mathrm{Dif}(M)$ je zde bijekce $\phi^\varepsilon : M\rightarrow M$ taková, že ϕ^ε a $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ jsou třídy $C^{(1)}$.

Jednoparametrická grupa transformací M je spojitý homomorfizmus grup $\phi : (\mathbb{R},+) \rightarrow (\mathrm{Dif}(M),\circ)$

$$\phi : \varepsilon \rightarrow \phi^\varepsilon \qquad \phi^0 = \mathrm{Id} \qquad \phi^{\varepsilon+\delta} = \phi^\varepsilon\circ\phi^\delta \qquad (\phi^\varepsilon)^{-1} = \phi^{-\varepsilon}$$

Znění, které dokážeme:

Transformace (aktivní)

$$q'_j = q'_j(\vec{q},\varepsilon) = \phi^\varepsilon_j(\vec{q}) \quad \text{fce. třídy } C^{(2)},\ \det\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_j}\right) \neq 0$$

$$q'_j(\vec{q},0) = q_j \qquad \forall j\in\hat{s}$$

$$\dot{q}'_j = \dot{q}'_j(\vec{q},\dot{\vec{q}},\varepsilon) = \phi^\varepsilon_{*j}(\vec{q},\dot{\vec{q}}) = \frac{\hat{d}q'_j}{dt} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

Invariance Lagrangeovy funkce $\forall\vec{q}\ \forall\dot{\vec{q}}\ \forall t\ \forall\varepsilon$

$$L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t,\varepsilon) := L(\vec{q}'(\vec{q},\varepsilon),\dot{\vec{q}}'(\vec{q},\dot{\vec{q}},\varepsilon),t) = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{k=1}^{\hat{s}} \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\partial q'_k}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ je I.P.

Důkaz: invariance $L \iff \forall\varepsilon\forall\vec{q}\forall\dot{\vec{q}}\forall t$

$$0 = \left.\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\right|_{(\vec{q},\dot{\vec{q}},t,\varepsilon)} = \left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{(\vec{q}',\dot{\vec{q}}',t)}\cdot\left.\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right|_{(\vec{q},\varepsilon)} + \left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right|_{(\vec{q}',\dot{\vec{q}}',t)}\cdot\left.\frac{\partial\dot{q}'_i}{\partial\varepsilon}\right|_{(\vec{q},\dot{\vec{q}},\varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right) - \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} =$$

$$\frac{\partial\dot{q}'_i}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\hat{d}q'_i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)\dot{q}_k = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)$$

$$= \left.\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\right|_{(\vec{q}',\dot{\vec{q}}',t)}\cdot\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right)$$

zeslabíme požadavky z $\forall\varepsilon$ na $\varepsilon=0$ a dosadíme z LR2D

$$0 = \left.\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \underbrace{\left.\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\right|_{(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)}}_{=-Q_i^{(nep)}=0\ \forall i\in\hat{s}}\cdot\left.\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \left.\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\left.\frac{\partial q'_i}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right)\right|_{\vec{R}=0} = \left.\frac{\hat{d}}{dt}(I)\right|_{\vec{R}=0}$$

LR2D $\vec{R}(\vec{q},\dot{\vec{q}},\ddot{\vec{q}},t) = 0 \Rightarrow$

QED.

Pozn. $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t,\varepsilon) = L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t,0) + \left.\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ $\qquad 0 = \left.\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon = \mathrm{lin.\,část}\left[L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t,\varepsilon) - L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)\right]$

Infinitesimální verze teorému:

Transfromace (Taylorův rozvoj do 1. řádu v ε)

$$q'_j = q'_j(\vec{q},0) + \left.\frac{\partial q'_j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon + O(\varepsilon^2) = q_j + Y_j\cdot\varepsilon \qquad \underbrace{Y_j = \left.\frac{\partial q'_j}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = Y_j(\vec{q})}_{\text{vektorové pole tzv. generátor transformace}}$$

$$\dot{q}'_j = \frac{\hat{d}q'_j}{dt} = \dot{q}_j + \dot{Y}_j\cdot\varepsilon \quad \text{kde } \dot{Y}_j = \frac{\partial Y_j}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

Invariance L do 1. řádu v ε $\forall\vec{q}\ \forall\dot{\vec{q}}\ \forall t$

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q_i}Y_i + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{Y}_i = 0$$

$$\Downarrow$$

Veličina $I(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \sum_{k=1}^{\hat{s}}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}Y_k$ je I.P.

Př. rotace kolem osy x_3

$$x'_1 = x_1\cos\varepsilon - x_2\sin\varepsilon \qquad Y_1 = \left(\frac{\partial x'_1}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (-x_1\sin\varepsilon - x_2\cos\varepsilon)_{\varepsilon=0} = -x_2$$

$$x'_2 = x_1\sin\varepsilon + x_2\cos\varepsilon \qquad Y_2 = \left(\frac{\partial x'_2}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = (x_1\cos\varepsilon - x_2\sin\varepsilon)_{\varepsilon=0} = x_1$$

$$x'_3 = x_3 \qquad Y_3 = \left(\frac{\partial x'_3}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$$

Infinitesimálně

$$x'_1 = x_1 - x_2\varepsilon \qquad x'_2 = x_2 + x_1\varepsilon \qquad x'_3 = x_3$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \mathbb{1}\vec{x} + \varepsilon\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbb{A}}\vec{x}$$

Pokud

$$L(\vec{x}',\dot{\vec{x}}',t) = L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) \Rightarrow I = \sum_{i=1}^{\hat{s}}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}Y_i = p_iY_i = p_1(-x_2) + p_2x_1 + 0 = L_3$$

(pro infinitesimální do 1. řádu v ε)

Pozn. původní transformace $\vec{x}' = \exp(\varepsilon\mathbb{A})\vec{x}$

$$\exp(\varepsilon\mathbb{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon^k\mathbb{A}^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Základní principy mechaniky

— jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• **Diferenciální principy** — určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) Princip virtuální práce (Bernoulli 1708—1717) — statická rovnováha systému N částic:

<u>Statická rovnováha</u> (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud jsou souřadnice všech částic konstantní.
$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} X_{0,1} \\ \vdots \\ X_{0,3N} \end{pmatrix} \quad \forall t \quad \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{X}}(t) = 0,\ \ddot{\vec{X}}(t) = 0 \ \forall t \overset{2NZ}{\Rightarrow} \boxed{\vec{F}(\vec{X}_0, 0, t) = 0 \ \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

$$\Leftarrow \quad \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0,\ \dot{\vec{X}}(t_0) = 0,\ m_i \ddot{X}_i(t_0) = F_i(\vec{X}_0, 0) = 0 \ \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \dddot{X}_i(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} F_i(\vec{X}, \dot{\vec{X}}) = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\vec{X}_0, 0)\underbrace{\dot{X}_j(t_0)}_{=0} + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j}(\vec{X}_0, 0)\underbrace{\ddot{X}_j(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \dot{\vec{X}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\vec{X}}(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots = \vec{X}_0 \qquad \vdots$$

omezíme se na analytické funkce, $x(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}} & t \neq 0 \end{cases}$ nefunguje Taylor v 0

neplatí to pro tzv. flat funkce

a) volných (2NZ)
$$0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \iff 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} \quad \forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$$

↑ výslednice sil

(stačilo by pro lib. bázi $\mathbb{R}^{3N}$)

stačí libovolně malé — <u>infinitezimální</u>

Vektor $\delta\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0$ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ do bodu $\vec{X}$

Pozn. práce $A = \int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $đA(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ po křivce γ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(l)\, dl$)

nemusí být exaktní — musí být malé (infinitezimální)

<u>Virtuální práce</u> $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}, 0) \cdot \delta\vec{X} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$ je práce sil při virtuálních posunutích

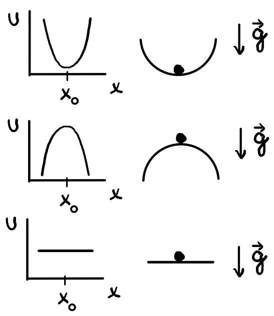
Princip virtuální práce:

$\vec{X}_0$ je rovnovážná konfigurace $\iff \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{X}_0, 0) \cdot \delta\vec{X} = 0 \quad \forall \delta\vec{X}$

Pozn. Variace funkce (izochronní $\delta t = 0$)
$$f = f(\vec{x}, t) \qquad f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i}_{=\delta f} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\delta x_i \delta x_j}_{=\delta^2 f} + \ldots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2}\delta^2 f(\vec{x}, t) + \ldots$$
$$\delta f = \textit{lineární část}\,[f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)]$$

Jsou-li všechny síly konzervativní
$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad \text{pak}$$
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{X} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{X} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = -\delta U$$
a rovnovážné polohy $\vec{X}_0$ jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Typ polohy	$U(\vec{x}_0)$	např.
• stabilní	minimum	$\delta^2 U(\vec{x}_0) > 0$
• labilní	maximum	$\delta^2 U(\vec{x}_0) < 0$
• indiferentní	ostatní	"$(\delta^2 U = 0)$"



b) vázaných — podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

(LR1D)
$$0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k \iff 0 = \left(\vec{F} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot \delta\vec{X} \quad \forall \delta\vec{X} \in \mathbb{R}^{3N}$$

vtištěné síly (akční) — vazbové síly (reakční)

$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$ $\qquad f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x} = \delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N \qquad \vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

$$\iff 0 = \left(\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right) \cdot (\delta\vec{x}^T + \delta\vec{x}^N) = \underbrace{(\vec{F}^T + \vec{F}^N)}_{\vec{F}} \cdot \delta\vec{x}^T + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta\vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta\vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \nabla f_k\right)}_{=0} \cdot \delta\vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x}^T$$
$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r} \qquad \forall \delta\vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky $\vec{F}^N$ v bázi $(\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r)$ normálového prostoru k M v bodě $\vec{x}_0$

$\delta\vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \ \forall k \in \hat{r}$

Princip virtuální práce
$$\boxed{\begin{matrix} \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta\vec{x} = 0 & \forall \delta\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \\ f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} & \delta\vec{x} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \end{matrix}}$$

Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \iff$ virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \iff$ práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vratná posunutí ($\forall \delta\vec{x}\ \exists -\delta\vec{x}$)
pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{x} \leq 0$