Teoretická Fyzika 1 — Analytická Mechanika

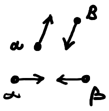
Kniha: Klasická teoretická fyzika,
I. Štoll, J. Tolar, I. Jex, Karolinum 2017

Mechanika klasická /relativistická /kvantová

— Newtonova mechanika (používá vektory)

Isaac Newton — 1. dílo teoretické fyziky
Matematické principy přírodní filozofie (1687)

1. Zákon setrvačnosti — inerciální vztažná soustava
2. Zákon síly $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\quad m\vec{a} = \vec{F}$
3. Zákon akce a reakce $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$ slabá verze / silná verze



Gravitační zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\varkappa \frac{m_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \qquad \varkappa = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

síla kterou působí β na α

Newtonovy pohybové rce. $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

— Analytická mechanika (používá skaláry)

Soubor alternativních formulací klasické mechaniky vycházejících z tzv. principů mechaniky.

Gottfried Wilhelm Leibniz — živá síla $m\vec{v}^2 = 2T$

Maupertuis, Bernoulli, Euler, d'Alembert, Laplace

Principy mechaniky => pohybové rovnice.

Např: "Při pohybu soustavy mezi dvěma konfiguracemi je $S = \langle T \rangle - \langle U \rangle$ minimální."

(Fermatův princip 1662 — šíření světla)

— Lagrangeova mechanika 1788
— Hamiltonova mechanika 1833
— Hamilton–Jacobiho rovnice

Analytická Mechanika

výhody — eliminace síly, snadné zobecnění mimo oblast mechaniky (teorie pole, kvantová mechanika)
— efektivita pro složité úlohy s vazbami, elegance, možnost užití vyšší matematiky

Lagrangeův formalizmus — nejprve pro soustavu volných hmotných bodů

Počet stupňů volnosti s = nejmenší počet parametrů nutných k určení polohy (konfigurace) soustavy (počet navzájem nezávislých pohybů, které může soustava konat)

- pro soustavu $N \in \mathbb{N}$ volných hmotných bodů v 3-dimnezionálním prostoru je $s = 3N$
- konfiguraci soustavy (polohu všech jejích bodů) budeme reprezentovat jediným bodem $\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ v 3N rozměrném euklidovském prostoru tzv. **konfiguračním prostoru**

$$\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = (r_{11}, r_{12}, \dots, r_{N3}) = (x_1, \dots, x_{3N})$$

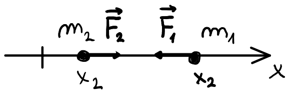
kartézské souřadnice $r_{\alpha i} = x_{(\alpha-1)N+i}$

- hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3$ hmotnost 1. bodu $\quad (x_1, x_2, x_3) = \vec{r}_1$
  $m_4 = m_5 = m_6$ $\quad$ 2. bodu $\quad (x_4, x_5, x_6) = \vec{r}_2$
  $\vdots$ $\quad\vdots$

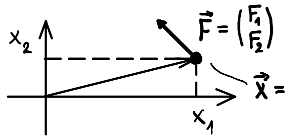
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial r_{\alpha i}}{\partial r_{\beta j}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

hmotnosti budeme místo jednotlivým bodům přiřazovat jednotlivým stupňům volnosti $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{3N} \end{pmatrix}$

Př. $N = 2$ body v $\mathbb{R}$



$\longrightarrow$ 1 bod v $\mathbb{R}^2$



$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}$

Derivace funkce podle času: $\quad F: \mathbb{R}^{2s+1} \to \mathbb{R}, \quad F = F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$

1) parciální derivace $\frac{\partial}{\partial t}$

$\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t$ jsou nezávislé proměnné fce. F

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t + \Delta t) - F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\Delta t}$$

2) funkce jedné proměnné $\frac{d}{dt}$

$\vec{x} = \vec{x}(t) \qquad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$

složená funkce času

$$\tilde{F}(t) = F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

implicitní a explicitní závislost na čase

$$\dot{\tilde{F}}(t) = \frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}$$

parciální derivace jsou vypočteny v bodě

Einsteinova sumace !!!

3) operátor úplné (totální) $\frac{\hat{d}}{dt}$ časové derivace

$$\dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) = \frac{\hat{d}}{dt}F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}$$

$$\frac{\hat{d}}{dt} f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\dot{x}_i \qquad t = 1$$

$$\begin{tikzcd}
F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \arrow[r, "\frac{\hat{d}}{dt}"] \arrow[d, "\vec{x} = \vec{x}(t)"] & \dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, t) \arrow[d, "\vec{x} = \vec{x}(t)"] \\
\underbrace{F(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}_{\tilde{F}(t)} \arrow[r, "\frac{d}{dt}"] & \underbrace{\dot{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), t)}_{\dot{\tilde{F}}(t)}
\end{tikzcd}$$

Začínat s popisem budeme vždy v inerciální vztažné soustavě (v kartézských souřadnicích).

Newtonovy rovnice $m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \quad \forall \alpha \in \hat{N} \quad \longrightarrow \quad m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$ nebo $\mathbb{M}\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

V neinerciální soustavě bychom museli přidat setrvačné síly a najít pro ně potenciály.

- upravíme levou stranu rovnic $m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$ (tj. bez sumace přes i)

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\hat{d}}{dt}(m_i \dot{x}_i) = \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{x}_j^2\right) = \frac{1}{2}\sum_j m_j 2\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \delta_{ji} = m_i \dot{x}_i \quad \forall i \in \widehat{3N}$$

kinetická energie soustavy $T(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2$ má v kartézských souřadnicích vždy tento tvar

- Síly vtištěné (akční) na pravé staně rovnic nahradíme potenciály $\rightarrow$ silové pole (síla) $\vec{F}$ se nazývá:

1) <u>konzervativní</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ pokud $\exists U = U(\vec{x})$ potenciální energie tak, že $F_j(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{s}$

2) <u>potenciální</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, t)$ potenciál tak, že $F_j(\vec{x}, t) = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{s}$

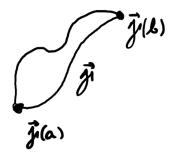
3) <u>zobecněná potenciální</u> $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ tak, že $F_j(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right) \quad \forall j \in \hat{s}$

(souhrně tzv. monogenní síly – Goldstein) zobecněný potenciál

Pozn. práce konzervativních sil nezávisí na trajektorii

$$W = \int_{\vec{j}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{j}(\ell)) \cdot \vec{j}'(\ell)\, d\ell = \int_a^b -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}(\vec{j}(\ell)) \cdot \frac{d\vec{j}}{d\ell}\, d\ell = -\int_a^b \frac{dU(\vec{j}(\ell))}{d\ell}\, d\ell$$

$$= -\left[U(\vec{j}(\ell))\right]_a^b = U(\vec{j}(a)) - U(\vec{j}(b))$$



Pozn. v $\mathbb{R}^3$ podmínka $\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t)$ je potenciální

Př. – homogenní tíhové pole $U(\vec{x}) = -m\vec{g} \cdot \vec{x}$

– centrální gravitační pole $U(\vec{x}) = -\varkappa \frac{Mm}{|\vec{x}|}$

– harmonický ocilátor (elastické pole) $U(\vec{x}) = \frac{1}{2}K\left(\sqrt{\vec{x}^2} - a_0\right)^2$

– Lorentzova síla (E.M. pole)

$U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q\left(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)\right)$

$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

- LR1D

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = F_i = F_i^{(nep)} + \underbrace{\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}}_{F_i^{(pot)}}$$

$T = T(\dot{\vec{x}})$ tj. $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial x_i} = F_i^{(nep)}$$

$$\forall i \in \widehat{3N} \qquad \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)}$$

Lagrangeova funkce (v kartézských)

$$\boxed{\begin{aligned} &L = T - U \\ &L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \end{aligned}}$$

Po vypočtení derivací funkce L dosadíme za x_i neznámé funkce času $\tilde{x}_i(t)$ a získáme tak obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu pro tyto neznámé funkce.

Pozn: Lagrangeovy funkce dvou neinteragujících soustav lze sečíst a získat Lagr. fci. popisující obě soustavy.

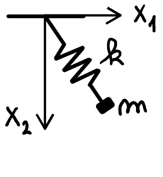
- **Nejednoznačnost Lagrangeovy funkce** $L' = L + \frac{\hat{d}}{dt}h(\vec{x}, t) \qquad h = h(\vec{x}, t) \in C^{(2)} \qquad \frac{\hat{d}h}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}} + \frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\hat{d}h}{dt} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{\hat{d}h}{dt}\right) = \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$= LS + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i}\dot{x}_j + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_j - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial t} = LS \Rightarrow L \text{ a } L' \text{ vedou na stejné LR1D}$$

Př. rovinný izotropní harmonický oscilátor



$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \qquad U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$

$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\hat{d}}{dt}(m\dot{x}_1) - (-kx_1) = m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

$$\frac{\hat{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\hat{d}}{dt}(m\dot{x}_2) - (-kx_2) = m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$$