Skládání momentů hybnosti, nerozlišitelné částice

Martin Štefaňák

1. prosince 2020

Přehled

Přehled

Skládání momentů hybnosti

- Dva momenty hybnosti velikosti j_1 a j_2

$$\mathscr{H}^{(j_\alpha)} = [|j_\alpha, m_\alpha\rangle | m_\alpha = j_\alpha, j_\alpha - 1, \ldots, -j_\alpha]_\lambda\,, \quad \dim \mathscr{H}^{(j_\alpha)} = 2j_\alpha + 1$$

- Popisujeme oba momenty hybnosti dohromady

$$\mathscr{H}^{(j_1, j_2)} = \mathscr{H}^{(j_1)} \otimes \mathscr{H}^{(j_2)} = [|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle | m_\alpha = j_\alpha, \ldots, -j_\alpha]_\lambda$$

- Vektory standardní báze jsou společné vlastní vektory 1. a 2. momentu hybnosti

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(\alpha)2}|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= \hbar^2 j_\alpha(j_\alpha + 1)|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\ \hat{J}_3^{(\alpha)}|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= \hbar m_\alpha |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle, \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned}$$

Celkový moment hybnosti

- Operátor celkového momentu hybnosti

$$\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(1)} + \hat{J}_k^{(2)}, \quad \left[\hat{J}_k, \hat{J}_l\right] = i\hbar\varepsilon_{klm}\hat{J}_m$$

- $\hat{J}^2$ není kompatibilní s $\hat{J}_3^{(1)}$ a $\hat{J}_3^{(2)}$, pouze s jejich součtem

$$\left[\hat{J}^2, \hat{J}_3^{(1)}\right] = 2i\hbar\left(\hat{J}_1^{(1)}\hat{J}_2^{(2)} - \hat{J}_2^{(1)}\hat{J}_1^{(2)}\right) = -\left[\hat{J}^2, \hat{J}_3^{(2)}\right]$$

- $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ jsou kompatibilní s $\hat{J}^{(1)2}$ a $\hat{J}^{(2)2}$ — společné vlastní vektory

$$\begin{aligned}
\hat{J}^{(\alpha)2}|j_1, j_2, j, m\rangle &= \hbar^2 j_\alpha(j_\alpha + 1)|j_1, j_2, j, m\rangle, \quad \alpha = 1, 2 \\
\hat{J}^2|j_1, j_2, j, m\rangle &= \hbar^2 j(j + 1)|j_1, j_2, j, m\rangle \\
\hat{J}_3|j_1, j_2, j, m\rangle &= \hbar m|j_1, j_2, j, m\rangle
\end{aligned}$$

Vlastní vektory celkového momentu hybnosti

Jak rozepsat kety $|j_1, j_2, j, m\rangle$ do standardní báze?

Vektor s maximální hodnotou $j = m = j_1 + j_2$

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle$$

- Obecně platí pro všechna m_1, m_2

$$\hat{J}_3 |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$$

- Pro ověření, že vektor odpovídá $j = j_1 + j_2$, použijeme

$$\hat{J}^2 = \hat{J}^{(1)2} + \hat{J}^{(2)2} + 2\hat{J}_3^{(1)}\hat{J}_3^{(2)} + \hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)}$$

Vektory s $j = j_1 + j_2$ a nižší hodnotou m

- Použijeme posunovací operátory pro celkový moment hybnosti

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_\pm^{(1)} + \hat{J}_\pm^{(2)}$$

- Např. vektor s $m = j_1 + j_2 - 1$

$$|j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \frac{1}{\alpha^-_{j_1+j_2, j_1+j_2}} \left(\alpha^-_{j_1,j_1} |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle + \right.$$
$$\left. + \alpha^-_{j_2,j_2} |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle\right)$$

- Vytvoříme $2(j_1 + j_2) + 1$ vektorů $|j_1, j_2, j_1 + j_2, m\rangle$

Snížení hodnoty j o jedna

Najdeme vektor $|j_1,j_2,j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle$

- Musí být lineární kombinací vektorů s $m_1+m_2=j_1+j_2-1$

$$\mathscr{H}^{(m=j_1+j_2-1)}=[|j_1,j_1-1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle,|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2-1\rangle]_\lambda$$

- $|j_1,j_2,j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle\in\mathscr{H}^{(m=j_1+j_2-1)}$, je k němu OG

$$|j_1,j_2,j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle=\frac{1}{\alpha^-_{j_1+j_2,j_1+j_2}}\Big(\alpha^-_{j_2,j_2}|j_1,j_1-1\rangle\otimes|j_2,j_2\rangle-$$
$$-\alpha^-_{j_1,j_1}|j_1,j_1\rangle\otimes|j_2,j_2-1\rangle\Big)$$

- Použitím $\hat{J}_-$ vytvoříme $2(j_1+j_2)-1$ vektorů $|j_1,j_2,j_1+j_2-1,m\rangle$

Minimální hodnota j

- Rozklad Hilbertova prostoru na direktní součet

$$\mathscr{H}^{(j_1,j_2)} = \mathscr{H}^{(j_1)} \otimes \mathscr{H}^{(j_2)} = \bigoplus_{j=j_{min}}^{j_{max}} \mathscr{H}^{(j)}$$

- Porovnání dimenzí prostorů

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{H}^{(j_1,j_2)} &= (2j_1+1)(2j_2+1) \\ &= \sum_{j=j_{min}}^{j_{max}} (2j+1) = (j_1+j_2+1)^2 - j_{min}^2 \end{aligned}$$

$$j_{min} = |j_1 - j_2|$$

Rozklad na ireducibilní reprezentace

- $\mathscr{H}^{(j_1,j_2)} = \mathscr{H}^{(j_1)} \otimes \mathscr{H}^{(j_2)}$ je reducibilní reprezentace $su(2)$
- Lze ji rozložit na direktní součet ireducibilních reprezentací

$$\mathscr{H}^{(j_1,j_2)} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathscr{H}^{(j)}$$

- Operátory $\hat{J}_k$ a $\hat{J}^2$ jsou v bázi $\{|j_1,j_2,j,m\rangle\}$ blokově diagonální
- Kety celkového momentu hybnosti jsou vlastní vektory interakce

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(\hat{J}^2 - \hat{J}^{(1)2} - \hat{J}^{(2)2}\right) \\
\hat{\vec{J}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{J}}^{(2)}|j_1,j_2,j,m\rangle &= \hbar^2(j(j+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1))|j_1,j_2,j,m\rangle
\end{aligned}$$

Skládání dvou spinů $\frac{1}{2}$ — $\mathscr{H}^{(\frac{1}{2})} \otimes \mathscr{H}^{(\frac{1}{2})} = \mathscr{H}^{(0)} \oplus \mathscr{H}^{(1)}$

- Vektor s maximální hodnotou $j = m = 1$

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1\rangle = |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

- Použijeme $\hat{J}_- = \hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}$ — triplet

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)\\
|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,-1\rangle &= |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

- Snížení hodnoty j — singlet

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)$$

Clebschovy-Gordanovy koeficienty

- V prostoru $\mathscr{H}^{(j_1)} \otimes \mathscr{H}^{(j_2)}$ máme dvě ON báze

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle | m_\alpha = j_\alpha, j_\alpha - 1, \ldots, -j_\alpha\} \\
\mathcal{B}_2 &= \{|j_1, j_2, j, m\rangle | j = |j_1 - j_2|, \ldots, j_1 + j_2, \ m = j, \ldots - j\}
\end{aligned}
$$

- Přechod mezi bazemi — unitární transformace
- Prvky matice — Clebschovy-Gordanovy (CG) koeficienty

$$
(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) = (\langle j_1, m_1 | \otimes \langle j_2, m_2 |)\, |j_1, j_2, j, m\rangle
$$

- Výběrová pravidla

CG je nenulový $\Longrightarrow m = m_1 + m_2$ a $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

Přechod mezi bazemi

- Condon-Shortleyova konvence — CG jsou reálné

$$
\begin{aligned}
|j_1, j_2, j, m\rangle &= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)\, |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \\
|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle &= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} (j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)\, |j_1, j_2, j, m\rangle
\end{aligned}
$$

- Systém ve stavu $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ — pravděpodobnost naměření hodnot celkového momentu hybnosti j a m je rovna $(j_1, j_2, m_1, m_2|j, m)^2$

CG koeficienty pro dva spiny $\frac{1}{2}$

Nenulové CG koeficienty

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}|1,1\right) &= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|1,-1\right) = 1 \\
\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|1,0\right) &= \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|1,0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|0,0\right) &= -\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|0,0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Systém ve stavu $|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\rangle + |\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\rangle\right)$$

- Projekce celkového spinu do osy z je nulová, $j = 1$ a $j = 0$ s pravděpodobností 0.5

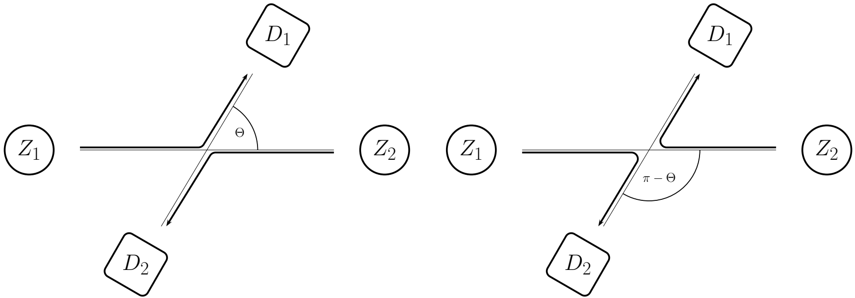
Přehled

Nerozlišitelné částice

- Stav kvantové částice je popsaný vlnovou funkcí $\psi(\vec{x}, t)$
- $|\psi(\vec{x}, t)|^2$ je pravděpodobnost nalezení částice v bodě $\vec{x}$
- K určení polohy částice musíme provést měření
- V kvantové mechanice neznáme trajektorie částic
- Popisujeme systém více částic, jejich vlnové funkce se překrývají — pokud jsou identické, tak je nemohu rozlišit
- Identické částice jsou v kvantové mechanice nerozlišitelné
- Předpovědi teorie nesmí na očíslování částic záviset

Pružný rozptyl částic

- Pružný rozptyl dvou částic, popis v těžišťové soustavě
- Detektor D_1 pod úhlem θ
- Detektor D_1 zaznamená dopad částice — P_1



Pravděpodobnost detekce bude záviset na typu částic

Pružný rozptyl rozlišitelných částic

- Pro rozlišitelné částice jsem schopen odlišit, zda došlo k rozptylu o úhel θ, nebo $\pi - \theta$
- Sčítají se pravděpodobnosti těchto dvou jevů
- Amplituda pravděpodobnosti rozptylu do úhlu α — $f(\alpha)$
- Pravděpodobnost detekce pod úhlem θ

$$P_1^{(R)} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$$

- Speciálně pro $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$P_1^{(R)} = 2|f(\frac{\pi}{2})|^2$$

Pružný rozptyl nerozlišitelných částic

- Nejsme schopni rozlišit rozptyl o úhel θ a $\pi - \theta$
- Musí se skládat amplitudy rozptylu

Bosony

- Amplitudy rozptylu se sčítají — $P_1^{(B)} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$
- Pro $\theta = \frac{\pi}{2}$ je dvojnásobná pr. detekce — $P_1^{(B)} = |2f(\frac{\pi}{2})|^2 = 2P_1^{(R)}$

Fermiony

- Amplitudy rozptylu se odečítají — $P_1^{(F)} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$
- Rozptyl o $\theta = \frac{\pi}{2}$ nelze — $P_1^{(F)} = 0$

Vlnové funkce dvojice identických částic

- Stav dvou částic je popsaný vlnovou funkcí $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$
- Identické částice — změna očíslování nezmění fyzikální stav
- $\tilde{\psi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$ a $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ popisují stejný stav

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = C_\psi \tilde{\psi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = C_\psi^2 \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \implies C_\psi = \pm 1$$

- Vlnová funkce dvou nerozlišitelných částic musí být symetrická, nebo antisymetrická vůči záměně argumentů
- Princip superpozice — C_ψ nezávisí na ψ, jen na typu částic
- Symetrické vlnové funkce — bosony (celočíselný spin)
- Antisymetrické vlnové funkce — fermiony (polocelý spin)

Vlnové funkce n identických částic

- Vlnové funkce musí být úplně symetrické (bosony), nebo úplně antisymetrické (fermiony) vůči záměně libovolné dvojice $\vec{x}_i$, $\vec{x}_j$

$$\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = C_{ij}\psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n)$$

- Všechny $C_{ij} = 1$, nebo $C_{ij} = -1$ $(i \neq j)$
- C_{ij} — 1-dim reprezentaci grupy permutací n prvků S_n
- Jsou buď symetrické ($C_{ij} = 1$), nebo antisymetrické ($C_{ij} = -1$)
- Hilbertův prostor n bosonů — podprostor symetrických vektorů
- n fermionů — podprostor antisymetrických vektorů

$$\mathscr{H}^{(B)},\ \mathscr{H}^{(F)} \subset \mathscr{H}_1^{\otimes n}$$

Stavy dvou identických částic

- Zápis pomocí jednočásticových stavů $\psi_a \in \mathscr{H}_1$
- Dva bosony v různých jednočásticových stavech a_1, a_2

$$\psi^{(B)}_{a_1,a_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{a_1}(\vec{x}_1)\psi_{a_2}(\vec{x}_2) + \psi_{a_1}(\vec{x}_2)\psi_{a_2}(\vec{x}_1)\right)$$

- Bosony mohou být ve stejném jednočásticovém stavu $a_1 = a_2 = a$

$$\psi^{(B)}_{a,a}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi_a(\vec{x}_1)\psi_a(\vec{x}_2)$$

- Dva fermiony v různých jednočásticových stavech a_1, a_2

$$\psi^{(F)}_{a_1,a_2}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{a_1}(\vec{x}_1)\psi_{a_2}(\vec{x}_2) - \psi_{a_1}(\vec{x}_2)\psi_{a_2}(\vec{x}_1)\right)$$

- Fermiony nemohou být ve stejném jednočásticovém stavu

Stavy n bosonů

- π — permutace n prvků

$$\pi :\ \{1, 2, \ldots, n\} \to \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$$

- n bosonů v jednočásticových stavech $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\psi^{(B)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = \mathcal{N} \sum_{\pi \in S_n} \psi_{a_1}(\vec{x}_{\pi_1})\psi_{a_2}(\vec{x}_{\pi_2}) \ldots \psi_{a_n}(\vec{x}_{\pi_n})$$

- V jednočásticovém stavu a může být libovolný počet bosonů

Stavy n fermionů — Slaterův determinant

- n fermionů v různých jednočásticových stavech $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(F)}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; \psi_{a_1}(\vec{x}_{\pi_1})\psi_{a_2}(\vec{x}_{\pi_2})\psi_{a_n}(\vec{x}_{\pi_n}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{a_1}(\vec{x}_1) & \psi_{a_2}(\vec{x}_1) & \ldots & \psi_{a_n}(\vec{x}_1) \\ \psi_{a_1}(\vec{x}_2) & \psi_{a_2}(\vec{x}_2) & \ldots & \psi_{a_n}(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{a_1}(\vec{x}_n) & \psi_{a_2}(\vec{x}_n) & \ldots & \psi_{a_n}(\vec{x}_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Dva jednočásticové stavy jsou stejné — dostaneme nulu

Pauliho princip

V souboru nerozlišitelných fermionů nemohou existovat dvě částice ve stejném kvantovém stavu