Grupy a reprezentace 9

1. prosince 2020

Geometrická interpretace Velké věty ortogonality

Velká věta ortogonality tedy říká, že pokud vytvoříme vektory čísel o počtu prvků $|G|$ tak, že si zvolíme jednu **ireducibilní** *reprezentaci a v ní μ-tý řádek a ν-tý sloupec a prvky vektoru jsou prvky příslušné pozice v matici IR reprezentace pro všechny prvky grupy G ve stejném pořadí, pak jsou tyto vektory ortogonální pro různé pozice v matici dané reprezentace a totéž s maticemi neekvivalentních IR reprezentací. (Vždy máme stanovené pořadí prvků v G.)*
Je–li $|G| = n$, potom vektory s n prvky tvoří n-dimenzionální vektorový prostor. V takovém prostoru tedy může být maximálně n vzájemně kolmých vektorů, a proto platí, že $\sum_i l_i^2 \leq n$, kde suma jde přes všechny neekvivalentní ireducibilní reprezentace. (Později se zde ukáže, že vždy platí rovnost.)

Charaktery reprezentací

Pro maticové reprezentace zavedeme užitečnou veličinu nezávisející na bázi – tzv. charakter reprezentace.

Označme stopu matice $\mathrm{Tr}\left(T_I(g_i)\right) = \chi_I(g_i)$. **charakter prvku** g_i v reprezentaci T_I.

Množinu $\{\chi_I(e), \chi_I(g_1), \chi_I(g_2), \chi_I(g_3), \ldots\}$ uspořádaných n-tici stop matic $T_I(g_i)$ nazveme **charakter reprzentace** T_I.

$\chi_I(e) = n_I$

Můžeme tvrdit:

1. Charaktery ekvivalentních reprezentací jsou stejné (podobnostní transformací lze jednu reprezentaci převést na druhou)
2. Charaktery konjugovaných prvků jsou také stejné (z vlastností stopy), tj. prvky ve stejné konjugované třídě mají stejné charaktery.

$$G = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup \ldots$$

$$\chi_I = \chi_I(e), \chi_I(C_2), \chi_I(C_3), \chi_I(C_4) \ldots$$

Ortogonalita charakterů

Corollary

Věta ortogonality pro charaktery prvků grupy:

$$\sum_{g\in G} \chi_\mu(g)^* \chi_\nu(g) = n\delta_{\mu,\nu}. \tag{1}$$

Důkaz.

Ve velké větě ortogonality postavíme $\alpha = \beta, \ \mu = \nu$, tj. vezmeme diagonální elementy v každé matici a sečteme a $|G| = n$

$$\sum_{\mu=1}^{l_i} \sum_{\alpha=1}^{l_j} \{ \sum_{g\in G} T_i(g)^*_{\mu\mu} T_j(g)_{\alpha\alpha} = \frac{|G|}{l_i} \delta_{ij}\delta_{\mu\alpha}\delta_{\mu\alpha} \}, \tag{2}$$

$$\sum_{g_i\in G} \chi_\mu(g_i)^* \chi_\nu(g_i) = n\delta_{\nu\mu}, \tag{3}$$

Důkaz.

$$\sum_i N_i \chi_\mu(C_i)^* \chi_\nu(C_i) = n\delta_{\nu\mu}, \tag{4}$$

kde $G = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ a N_i je počet prvků v konjugované třídě. Prvky

$$\chi'_\mu(C_i) = \sqrt{\frac{N_i}{n}} \chi_\mu(C_i) \tag{5}$$

tvoří ortonormální systém, který je větší nebo roven počtu neekvivalentních ireducibilních reprezentací. □

Maticově lze zapsat:

$$Q = \begin{pmatrix} \chi_1(C_1) & \chi_1(C_2) & \chi_1(C_3) & \dots & \chi_1(C_k) \\ \chi_2(C_1) & \chi_2(C_2) & \chi_2(C_3) & \dots & \chi_2(C_k) \\ \chi_3(C_1) & \chi_3(C_2) & \chi_3(C_3) & \dots & \chi_3(C_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_k(C_1) & \chi_k(C_2) & \chi_k(C_3) & \dots & \chi_k(C_k) \end{pmatrix}$$

$$Q' = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \chi_1^*(C_1)N_1 & \chi_2^*(C_1)N_1 & \chi_3^*(C_1)N_1 & \dots & \chi_k^*(C_1)N_1 \\ \chi_1^*(C_2)N_2 & \chi_2^*(C_2)N_2 & \chi_3^*(C_2)N_2 & \dots & \chi_k^*(C_2)N_2 \\ \chi_1^*(C_3)N_3 & \chi_2^*(C_3)N_3 & \chi_3^*(C_3)N_3 & \dots & \chi_k^*(C_3)N_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1^*(C_k)N_k & \chi_2^*(C_k)N_k & \chi_3^*(C_k)N_k & \dots & \chi_k^*(C_k)N_k \end{pmatrix}$$

Potom

$$(QQ') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (Q'Q),$$

tj. platí také

$$\delta_{k,l} = \frac{N_k}{n}\sum_{\mu} \chi_\mu(C_k)^*\chi_\mu(C_l),$$

Jak zkonstruovat tabulku charakterů

Tabulka charakterů dává informace o ireducibilních reprezentacích.

1. $\chi_1(g_i) = 1$, triviální reprezentace
2. $\chi_\nu(e \equiv C_1) = l_\nu$, rozměru ireducibilní reprezentace
3. Počet ireducibilních reprezentací je roven počtu konjugovaných tříd. (ukážeme) Rozměry ireducibilních reprezentací l_ν jsou dány vztahem $\sum_\nu l_\nu^2 = n$. V mnoha případech má tato rovnice jednoznačné řešení.
4. Řádky v tabulce musí splňovat (ortogonalita)
$$\sum_i N_i \chi_\mu(C_i)^* \chi_\nu(C_i) = n\delta_{\nu\mu},$$
5. Sloupce musí splňovat (Q Q´ = Q´ Q)
$$\sum_\nu \chi_\nu(C_k)^* \chi_\nu(C_i) = \frac{n}{N_k} n\delta_{k,i},$$
6. Prvky uvnitř i–tého řádku splňují ($C_i.C_j = \sum_k c_{ijk} C_k$, c_{ijk} – kolikrát je která třída obsažena v součinu.)
$$N_i \chi_\nu(C_i)^* N_j \chi_\nu(C_j) = l_\nu \sum_k c_{ijk} N_k \chi_\nu(C_k),$$

Dokážeme vztah 6, ostatní už jsme ukázali, nebo je triviální

Důkaz.

v každé třídě platí$X\, C_k X^{-1} = C_k$, pro $\forall X \in G$, tj. $X\, C_k = C_k X$, a totéž také pro reprezentace.
Vytvořme matici $\Gamma_k = \sum_i A_i, \quad C_k \equiv \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$.
Γ_k komutuje se všemi prvky reprezentace a podle Schurova lemmatu $\Gamma_k = \eta_k \mathbb{I}$. Upravíme vztah pro c_{ijk} pro matice Γ_k. Protože výraz vpravo komutuje se všemi prvky, musí komutovat i výraz vlevo, tj musí obsahovat celé konjugované třídy a je takto rozložitelný.

$$\Gamma_i \Gamma_j = \sum_{A_i \in C_i} A_i \sum_{B_j \in C_j} B_j = \sum_{j,i} A_i B_j = \sum_k c_{ijk} \Gamma_k,$$

protože $A_i B_j = D_l \in C_k$. Dosazením $\eta_i \eta_j = \sum_k c_{ijk} \eta_k$. A uděláme stopu:

$$\mathrm{Tr}\ \Gamma_k = \eta_k l_\nu \text{ a také } \mathrm{Tr}\ \Gamma_k = \mathrm{Tr} \sum_{i=1}^{N_k} A_i = N_k \chi_\nu(C_k), \text{ tj.}$$

$$\eta_k = \frac{N_k \chi_\nu(C_k)}{l_\nu}.$$

Tabulka charakterů pro D_6

D_6 má tři konjugovné třídy E; A, B, C; D, F

	C_1	$3C_2$	$2C_3$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Poslední podmínka pro konstrukci tabulek říká:

$$C_2.C_2 = 3C_1 + 3C_3;\;\; 3.3 = 3.1 + 3.2$$

$$C_3.C_3 = 2C_1 + C_3;\;\; 2.2 = 2.1 + 1.2$$

$$C_3.C_2 = 2C_2;\;\; 3.2 = 2.3$$

První je výsledek násobení tříd a vedle pro příslušný počet prvků.
Pro matice Γ platí:

$$\Gamma_3\Gamma_2 = (A+B+C)(D+F) = AD + AF + BD + BF + CD + CF =$$

$$= B + C + C + A + A + B = 2(A+B+C) = 2\Gamma_2$$

kolikrát je ireducilní reprezentace obsažená v reducibilní

Theorem

Mějme unitární reducibilní reprezentaci $T(g)$ rozepsanou pomocí ireducibilních reprezentací jako $T(g) = \bigoplus_\nu a_\nu T_\nu(g)$. Označme $\chi(C_i) = \sum_\nu a_\nu \chi_\nu(C_i)$. Potom pro koeficienty rozkladu a_μ platí

$$a_\mu = \frac{1}{n} \sum_i N_i \chi_\mu(C_i)^* \chi(C_i). \tag{6}$$

Důkaz.

Rovnost $\chi(C_i) = \sum_\nu a_\nu \chi_\nu(C_i)$ vynásobme $N_i \chi^*_\mu(C_i)$ a vysčítáme přes i – počet prvků ve třídě a použijeme ortogonalitu charakterů:

$$\sum_i N_i \chi^*_\mu(C_i)\chi(C_i) = \sum_\nu a_\nu \sum_i N_i \chi^*_\mu(C_i)\chi_\nu(C_i) = \sum_\nu a_\nu n \, \delta_{\mu,\nu} = a_\mu n$$

□

Což není nic jiného než rozklad do ortogonální báze.

Frobeniovo kriterium ireducibility

Tohoto rozkladu využiji k následující podmínce:

$$\sum_i N_i \chi^*(C_i)\chi(C_i) = \sum_i N_i \sum_\nu a_\nu \chi^*_\nu(C_i) \sum_\mu a_\mu \chi_\mu(C_i) =$$

$$= \sum_\nu \sum_\mu a_\mu a_\nu \sum_i N_i \chi^*_\nu(C_i)\chi_\mu(C_i) = \sum_\nu \sum_\mu a_\mu a_\nu \, n \, \delta_{\mu,\nu} = \sum_\mu |a_\mu|^2 n$$

Corollary

Z definice je $T(g)$ ireducibilní reprezentace, právě když pro jednu hodnotu μ je $a_\mu = 1$. To jest

$$\sum_i \chi_{(\mu)}(g_i)^* \chi(g_i) = n. \tag{7}$$

.

Regulární reprezentace

Udělějme si tabulku násobení prvků grupy prvky inverzními:

A=

	e	g_2	g_3	g_4
e	e	g_2	g_3	g_4
g_2^{-1}	g_2^{-1}	e	$g_2^{-1}g_3$	$\dots$
g_3^{-1}	g_3^{-1}	$g_3^{-1}g_2$	e	$\dots$
g_4^{-1}	g_4^{-1}	$g_4^{-1}g_2$	$g_4^{-1}g_3$	e
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Regulární reprezentace grupy je množina matic, kde každému prvku grupy je přiřazena matice, která má 1 v místě, kde se nachází daný prvek v tabulce 1 a všude jinde 0. Akce grupy je transitivní, tj. v každém slupci a každém řádku bude mít reprezentace prvku právě jednu jedničku. Označím-li prvky matice v k-tém řádku a l-tém sloupci a_{kl} tak mohu psát

$$(T^{(reg)}(g_i))_{kl} = \delta(a_{kl}, g_i) = \delta(\{g_k^{-1}g_l\}, g_i),$$

δ se rozumí Kroneckerovo delta.

Vlastnosti:

- Že je to maticová reprezentace:

$$\sum_k (T^{(reg)}(g_p))_{ik}(T^{(reg)}(g_r))_{kj} = \sum_k \delta(\{g_i^{-1}g_k\}, g_p)\delta(\{g_k^{-1}g_j\}, g_r) =$$

$$= \sum_k \delta(g_k, \{g_i g_p\})\delta(\{g_k^{-1}g_j\}, g_r) = \delta(\{g_p^{-1}g_i^{-1}g_j\}, g_r) =$$

$$= \delta(\{g_i^{-1}g_j\}, \{g_p g_r)\} = (T^{(reg)}(g_p g_r))_{ij}$$

- Charaktery:

$$\chi^{(reg)}(e) = n, \;\; \chi^{(reg)}(g_i) = 0 \text{ pokud } g_i \neq e$$

Celebrated theorem

$|G| = n$

Theorem

Počet neekvivalentních ireducibilních reprezentací:
Každá regulární reprezentace obsahuje každou ireducibilní reprezentaci tolikrát, kolik je její dimenze.

Důkaz.

Použitím Frobeniusovy podmínky kolikrát je ireducibilní reprezentace T_i v reprezenaci $T^{(reg)}$ a vlastností regulární reprezentace dostaneme:

$$a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi^{(reg)}(g_i)\chi_\nu^{(reg)}(g_i) = \frac{1}{n}nn_\nu = n_\nu$$

$\square$

Důsledek

$|G| = n$

Corollary

$$\sum_{\nu=1}^{k} n_\nu^2 = n,$$

kde sčítáme přes všechny neizomorfní ireducibiní reprezentace.

Tím je ukázana rovnost v nerovnosti v důsledku Velké věty ortogonality.

Corollary

Všechny abelovské grupy mají pouze jednorozměrné ireducibilní reprezentace.

$$\sum_{\nu=1}^{n} n_\nu^2 = n,$$

kde sčítáme přes všechny neizomorfní ireducibiní reprezentace.