Grupy a reprezentace 10

wiki-skripta

Zajímá nás grupa, která ponechá Hamiltonian invarintní.
Nechť **R** je reálná ortogonální transformace souřadnic:

$$\mathrm{x}' = \mathrm{Rx}, \;\; x'_i = \sum_i R_{ij} x_j$$

a inverzní transformace

$$x_i = \sum_j R^{-1}_{ij} x'_j = \sum_j R_{ji} x'_j$$

Takováto matice tvoří grupu vůči násobení.

Zavedeme grupu izometrickou s transformační grupou, jejíž prvky působí na funkce a ne na souřadnice.

$$P_R\, f(Rx) = f(x), \;\; P_R\, f(x) = f(R^{-1}x) = g(x).$$

Je to grupa transformací svázána s transformací souřadnic.

$$P_S[P_R\, f(x)] = P_S\, g(x) = g(S^{-1}) = f[R^{-1}(S^{-1}x)] =$$

$$= f[(SR)^{-1}\, x)] = P_{SR}\, f(x)$$

Example

Rotace kolem osy c o 90^o

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; P_R\, f(x,y,z) = f(x,-z,y)$$

Grupa svázána se Schrödingerovou rovnicí

Řešení stacionární Schrödingerova rovnice dané Hamiltononvým operátorem $\hat{H}$ je invariantní vůči grupě operátorů komutujícími s $\hat{H}$:

$$\hat{H}\psi = E\psi,\ P_R\hat{H}\psi_n = P_R E_n \psi_n,\ \hat{H}(P_R\psi_n) = E_n(P_R\psi_n).$$

Pokud komutují ψ_n a $P_R\psi_n$ jsou vlastní vektory příslušné téže vlastní hodnotě E_n - degenerace.
Díky táto grupě můžeme z jednoho vlastního vektoru dopočítat další vlastní vektory příslušné každé dané vlastní hodnotě.
Atom vodíku - stavy s,p, ... se
Pokus jsou všechny degenerované hodnoty dopočitaelné z grupy symetrie - normální degenerace, jinak náhodná.

Předpokládejme, že hodnota E_n je l_n krát degenerovaná, tj. můžeme vybrat l_n ortonormálních vlastních vektorů příslušných E_n.
Akcí operátoru symetrie na vlastní vektor ψ_ν dostaneme obecně jiný vlastní vektor, který rozložíme do báze:

$$\psi_\kappa = P_R \psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{l_n} T_n(R)_{\kappa,\mu} \psi_\mu.$$

Matice $T_n(R)_{\kappa,\mu}$ tvoří l_n rozměrnou reprezentaci grupy.
A pokud existuje vždy operátor, který transformuje vlastní vektor v kterýkoliv jiný vlastní vektor, je reprzentace ireducibilní.
Je vidět, že platí :

$$T_n(SR) = T_n(S) T_n(R)$$

a l_n vektorů ψ_ν tvoří bázi reprezentačního prostoru.
Grupa D_6 je grupou symetrie pro pohyb elektronu v poli tří protonů v rozích rovnostraného trojúhelníku.
Grupa $SO(3)$ je grupa symetrie pohybu elektronu v centrálním poli.

Řešitelné a nilpotentní grupy

Zopakujme:

*V grupě G řadu podgrup (řetěz) $e = N_0 \leq N_1 \leq \ldots \leq N_{k-1} \leq N_k = G$ nazýváme **kompoziční řada**, pokud $(\forall i, 0 \leq i \leq k-1)(N_i \trianglelefteq N_{i+1})$ a N_{i+1}/N_i je jednoduchá. Faktor grupy N_{i+1}/N_i se pak nazývají **kompoziční faktory** G.*

Definice:

Grupa se nazývá **řešitelná**, *pokud existuje řada*

$$e = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \ldots \trianglelefteq G_s = G$$

tak, že

$$G_i/G_{i-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, s-1 \tag{1}$$

je abelovská.

Theorem

Konečná grupa je řešitelná $\Leftrightarrow$ *když pro každý dělitel* $n \mid |G|, (n, \frac{|G|}{n}) = 1$ *má grupa* G *podgrupu řádu* n.
Pokud N *a* G/N *jsou řešitelé, pak* G *je řešitelná*

Důkaz.

Nechť $\overline{G} = G/N$ *a* $e = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq N_r = G$ *tak, že* N_{i+1}/N_i *je abelovská a nechť* $N = \overline{G_0} \trianglelefteq \overline{G_1} \trianglelefteq \overline{G_2} \ldots \trianglelefteq \overline{G_m} = \overline{G}$ *je řada podgrup tak, že* $\overline{G_{i+1}}/\overline{G_i}$ *jsou abelovské. Podle 4. VOI existuje* G_i $N \leq G_i$ *a podle 3. VOI*

$$\overline{G_{i+1}}/\overline{G_i} \simeq G_{i+1}/G_i.$$

Tudíž

$$e = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq N_2 \ldots \trianglelefteq N_s = N = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \ldots \trianglelefteq G_s = G$$

a všechny faktor grupy jsou abelovské. $\square$

Maximální podgrupy

Definice:
Maximální podgrupa je vlatní podgrupa $M < G$, tak že neexistuje H $M < H < G$.

Lemma

Nechť p je prvočíslo a P je grupa řádu p^a, $a \geq 1$. Potom

1. $Z(P) \neq 1$
2. *H je netriviální normální podgrupa, potom $H \cap Z(P) \neq 1$*
3. *Pokud $H \trianglelefteq P$ potom pro každé $p^b \mid |H|$ v H existuje normální podgrupa řádu p^b.*
4. *Pokud $H < P$ pak $H < N_P(H)$ (nerovná se, je vlastní, jsou prvky mimo H, které normalizují H.)*
5. *Každá maximální podgrupa P má index p.*

Horní centrální řada

Definice:

1. Grupa G, definujme

$$Z_0(G) = 1, \;\; Z_1(G) = G,$$

   a Z_{i+1} je podgrupa G obsahující Z_i takto:

$$Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$$

   (tj. Z_{i+1} je vzor centra $Z(G/Z_i)$ v G při přirozené projekci) Řada podgrup

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots \leq Z_{k-1} \leq$$

   se nazývá **horní centrální řada** G.

2. Grupa G se nazývá **nilpotentní** pokud $Z_c = G$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$, c je třída nilpotence G.

Příklady

- Pokud G je abelovská, je nilpotentní třídy 1, protože
$$G = Z(G) = Z_1(G)$$
- Pro každou konečnou grupu existuje n tak, že
$$Z_n(G) = Z_{n+1}(G) = Z_{n+2}(G) = \dots$$
Např. $Z_n(D_6) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$
Podle definice $Z_n(G)$ je vlastní podgrupou pro všechny nilpotentní grupy.
- D_8 a Q_8 jsou nilpotentní třídy 2.

Komutátory a dolní centrální řady

Komutátor prvků x, y grupy G je definován

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

a komutátor dvou podgrup H, K

$$[H, K] = \{[h, k], h \in H, k \in K\}.$$

Definice:

Pro každou grupu G definujme následující podgrupy:

$$G^0 = G, \quad G^1 = [G, G], \quad G^{i+1} = [G, G^i].$$

Potom řada podgrup se nazývá **dolní centrální řadou** *grupy G.*

$$G^0 \geq G^1 \geq G^2 \geq \dots$$

Theorem

Grupa G je nilpotentní $\Leftrightarrow$ $G^n = 1$ pro nějaké n. Je nilpotentní třídy c $\Leftrightarrow$ c je nejmenší číslo pro něž platí $G^c. = 1$

Komutátorové řady a řešitelné grupy

Definice:

Pro každou grupu G definujme následující podgrupy:

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(1)} = [G, G], \quad G^{(i+1)} = [G^i, G^i].$$

Potom řada podgrup se nazývá **komutátorovou řadou** *grupy G.*

$$G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

Example

$$G = S_3, \quad G^{(1)} = G^1 = A_3, \quad G^2 = [S_3, A_3] = A_3, \quad G^{(1)} = [A_3, A_3] = 1$$

Theorem

Grupa G je řešitelná $\Leftrightarrow$ $G^{(n)} = 1$ pro nějaké n.

Závěr:**Hierarchie grup**
cyklické grupy $\subset$ abelovské grupy $\subset$ nilpotentní grupy $\subset$ řešitelné grupy $\subset$
$\subset$ všechny grupy