Grupy

Buď $G \neq \emptyset$ a $\cdot : G \times G \to G$ zobrazení (součin) takové, že platí

1, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ asociativita

2, $\exists e \in G$ tak, že $\forall g \in G \quad e \cdot g = g \cdot e = g$ jednotka

3, $\forall g \in G \ \exists_1 g^{-1} \in G$ tak, že $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ inverzní prvek.

Pak uspořádanou dvojici $(G, \cdot)$ nazýváme **grupou**.

Grupa $(G, \cdot)$ je abelovská (komutativní), je-li komutativní operace součin. $(g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1)$

Př: $(\mathbb{Z}, +)$ $\quad \cdot \equiv +,\ e \equiv 0,\ g^{-1} \equiv -g$ $\quad (\mathbb{R}, +) \quad (\mathbb{C}, +) \quad (\mathbb{T}, +) \quad (V, \oplus)$ ← vekt. prostor

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \quad (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \quad (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot), \quad (\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot)$

} abelovské grupy

Př Maticové grupy (neabelovské) $\cdot \equiv$ součin matic, $e \equiv \mathbb{1}$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A \neq 0 \}$ obecná lineární grupa (lineární transformace)

$SL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A = 1 \}$ speciální -||- -||- (zachovávají objem)

$O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \underline{AA^T = A^TA = \mathbb{1}} \}$ ortogonální grupa (zachovávají vzdálenosti a úhly)

$SO(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A = 1,\ \underline{A^{-1} = A^T} \}$ speciální O.G. grupa (✓ ✓)

Podgrupa grupy $(G, \cdot)$ je každá $\emptyset \neq H \subset G$ taková, že $(H, \cdot|_{H \times H})$ je grupa.

Př: $SO(n, \mathbb{R}) \subset O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$

$SO(n, \mathbb{R}) \subset SL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$

Př $SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad$ DCV. $A(\varphi) A(\theta) = A(\varphi + \theta) \Rightarrow$ je abelovská

$= A(\theta + \varphi)$

$A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi)$

$A(0) = \mathbb{1}$

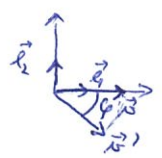
Pozn: jednoparametrická podgrupa je spojitý homomorfismus grup $\Psi : (\mathbb{R}, +) \to (G, \circ)$ „Topologická grupa"

$\Psi(x + y) = \Psi(x) \circ \Psi(y)$

Transformace $\quad \vec{v}' = A(\varphi) \vec{v}$

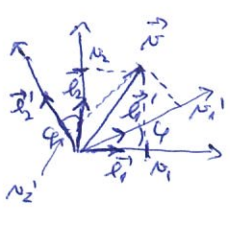
$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

aktivní transformace $(\vec{v}')_E = \underbrace{{}^E A(\varphi)^E}_{A(\varphi)} (\vec{v})_E$ (báze)



- obecně mění vlastnosti objektu
- speciální např. $A \in SO(n, \mathbb{R})$ zachovávají velikosti, úhly, objem.

pasivní transformace $(\vec{v})_{E'} = \underbrace{{}^{E'}\mathrm{Id}^{E}}_{A(\varphi)} (\vec{v})_E$



- nemění vlastnosti objektu, mění pouze jejich popis
- speciálně $A \in SO(n, \mathbb{R})$ zachovávají tvar skalárního součinu

Značení $\overset{\leftrightarrow}{v} \in V$ abstraktní vektor z prostoru V

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \left(\overset{\leftrightarrow}{v}\right)_E \qquad v^i = (\vec{v})^i = \left(\overset{\leftrightarrow}{v}\right)_E^i \qquad \text{v jiné bázi } \left(\overset{\leftrightarrow}{v}\right)_{\tilde{E}} = \tilde{\vec{v}}$$

složky vektoru v bázi E — bázi

Einsteinovo sumační pravidlo – je-li v nějakém členu nejvýše index 2 krát, tak se přes něj sčítá od jedné o dimenze prostoru (3)

Př:
$$\underbrace{A_{ij} x_j}_{\sum_j} + \underbrace{B_{ij} C_{jk} y_k}_{\sum_j \sum_k} + \underbrace{x_i y_j^2}_{\sum_j} + \underbrace{D_{ll} x_k y_k z_i}_{\sum_l \sum_k} + \underbrace{\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}}_{\sum_k}$$

$y_j^2 = y_j y_j$

Kroneckerův δ-symbol

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad i,j \in \hat{n} = \{1,2,\dots,n\} \quad (\hat{3}) \qquad \delta_{ij} = \mathbb{1}_{ij} \qquad \mathbb{1} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pro $n = 3$

Př:
$$\underbrace{\delta_{ij} y_j}_{\sum_j} = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} y_j = \delta_{i1} y_1 + \delta_{i2} y_2 + \delta_{i3} y_3 = 1 \cdot y_i = y_i$$

$$\delta_{ij} T_{kjl} = T_{kil}$$
$$\delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

Př: Skalární součin $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} \overset{\text{v O.N.}}{=} \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_i$$

$$\vec{x}^T g \vec{y} = \vec{x}^T \mathbb{1} \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ortogonální matice

$A \in GL(n, \mathbb{R})$ zachovávají skalární součin

$$\underbrace{(A\vec{x})^T A\vec{y}}_{} \overset{\text{zachování S.S.}}{=} \vec{x}^T \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{A^T A = \mathbb{1} = A A^T} \text{ podmínka ortogonality} \iff A \in O(n, \mathbb{R})$$

$$\vec{x}^T A^T A \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$$
$$\vec{x}^T (\underbrace{A^T A \vec{y} - \vec{y}}_{=0}) = 0 \quad \forall \vec{x}$$
$$\vec{y} = \underbrace{A^T A}_{= \mathbb{1}} \vec{y} \quad \forall \vec{y}$$

$$(A^T A)_{ik} = \mathbb{1}_{ik} = (A A^T)_{ik}$$
$$(A^T)_{ij} (A)_{jk} = \delta_{ik} = (A)_{ij} (A^T)_{jk}$$
$$\boxed{A_{ji} A_{jk} = \delta_{ik} = A_{ij} A_{kj}}$$

$\delta_{ik} = \delta_{ki}$ symetrický

$A \in O(n, \mathbb{R})$

$$\det(A^T A) = \det(\mathbb{1}) = 1$$
$$\det A^T \det A = \det A \det A = (\det A)^2 = 1 \implies \det A = \begin{cases} +1 & \text{vlastní O.G. transformace (Rotace), grupa } SO(n, \mathbb{R}) \\ -1 & \text{nevlastní O.G. transformace, netvoří grupu } O(n, \mathbb{R}) \setminus SO(n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

v $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot SO(n, \mathbb{R})$

Levi-civitův symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{pokud } (i,j,k) \text{ jsou sudá permutace } (1,2,3) \\ -1 & \text{lichá} \\ 0 & i=j \vee j=k \vee k=i \end{cases}$$

$1 \to 2 \to 3$

$(1,2,3)\ (2,3,1)\ (3,1,2)$

$(2,1,3)\ (3,2,1)\ (1,3,2)$

$\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{112} \Rightarrow = 0$ je antisymetrický

$\mathbb{A} \in SO(3,\mathbb{R})$ tak $\boxed{\det \mathbb{A} = 1}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix}$$

ijk	
1 1 2	0
1 2 3	1
2 1 3	−1
2 3 1	+1

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{l1} & A_{m1} & A_{n1} \\ A_{l2} & A_{m2} & A_{n2} \\ A_{l3} & A_{m3} & A_{n3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$

Transpozice

$A_{i1}A_{l1} + A_{i2}A_{l2} + A_{i3}A_{l3} = A_{ir}A_{lr} \overset{A \in SO(3)}{=} \delta_{il}$

$$= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in} + \delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{il} - \delta_{kn}\delta_{jl}\delta_{im}$$

$k=m$, $\sum_k$

$$\delta_{kn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm}\underbrace{\delta_{kk}}_{3} + \delta_{jl}\underbrace{\delta_{km}\delta_{ik}}_{\delta_{mi}=\delta_{im}} + \delta_{kl}\delta_{im}\underbrace{\delta_{jk}}_{\delta_{lj}=\delta_{jl}} - \delta_{kl}\delta_{jm}\underbrace{\delta_{ik}}_{\delta_{il}} - \underbrace{\delta_{km}\delta_{jk}}_{\delta_{jm}}\delta_{il} - \underbrace{\delta_{kk}}_{3}\delta_{jl}\delta_{im}$$

$$= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{im}\delta_{jl} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}}$$

Dcv. $\delta_{jm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = \ldots\ldots$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \ldots\ldots$

Vektorový součin $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\boxed{(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ijk}x_j y_k}$$

Determinant

$\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{3,3}$ $\quad \det \mathbb{M} = \sum_{\pi \in S_3}' \operatorname{sgn}\pi \, M_{1,\pi(1)} M_{2,\pi(2)} M_{3,\pi(3)}$

$$\boxed{\det \mathbb{M} = \varepsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}}$$