

Maxwellovy rce. ve vakuu (Maxwellovy–Lorentzovy rce.) (H.A.Lorentz 1892)

I. série

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

II. série

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{Elektrická intenzita } \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{F}}{q} \quad [\vec{E}] = Vm^{-1}$$

$$\text{Magnetická indukce } \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) \quad [\vec{B}] = T$$

$$\text{Hustota náboje } \rho = \rho(\vec{r}, t) \quad [\rho] = Cm^{-3}$$

$$\text{Proudová hustota } \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho \vec{v} \quad [\vec{j}] = Am^{-2}$$

$$\text{Permitivita vakua } \varepsilon_0 \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$$

$$\text{Permeabilita vakua } \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} Hm^{-1}$$

Popisují elektromagnetické pole (na mikroskopické - atomární úrovni) buzené daným rozložením zřidel ρ a \vec{j} . Současně pole působí na náboje tvořící zřídla *Lorentzovou silou* $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Rovnice je tak potřeba doplnit o relativistické rovnice pro pohyb nábojů $\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Gaussův zákon

Tok elektrické intenzity uzavřenou plochou je úměrný celkovému náboji obklopenému touto plochou.

$$\Psi_E = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Maxwellovo zobecnění Faradayova zákona

Časově proměnné magnetické pole budí pole elektrické (nezávisle na existenci vodivé smyčky).

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Neexistence magnetického monopólu

Magnetické pole je solenoidální (bez zdrojů). Siločáry jsou buď uzavřené křivky, nebo začínají a končí v nekonečnu. $\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

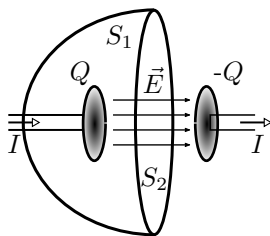
Ampérův zákon doplněný o Maxwellův posuvný proud

Elektrický proud a časově proměnné elektrické pole budí pole magnetické.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Psi_E}{dt} + \mu_0 I \end{aligned}$$

Maxwellův posuvný proud (kvůli splnění rovnice kontinuity) $\vec{j}_{Max} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

integruje se přes nehybné křivky a plochy, ∂S a ∂V nezávisí na čase



Rovnice kontinuity - zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

$$- \frac{dQ_V}{dt} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \text{div } \vec{j} dV = \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\partial V}$$

$$0 = \text{div rot } \vec{B} - \mu_0 (\varepsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{div } \vec{j}) = - \mu_0 (\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{j}) = - \mu_0 (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j})$$

Rovnice elektromagnetické vlny

rot na druhé rovnice obou sad a dosazením z rovnic prvních dává

$$0 = \text{rot rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

$$0 = \text{rot rot } \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}) - \mu_0 \text{rot } \vec{j} = \text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \text{rot } \vec{j}$$

nehomogenní vlnové rovnice pro elektromagnetickou vlnu

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad } \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Pro $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ homogenní vlnové

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = - \mu_0 \text{rot } \vec{j}$$

rovnice pro e.m. vlnu ve vakuu.

$$\text{Weberův vztah } \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 299\,792\,458 m s^{-1} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H m^{-1}$$

Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí (J.C.Maxwell 1865)

$$\text{I. } \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$$

$$\text{II. } \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Popisují makroskopické e.m. pole v látkovém prostředí – střední hodnoty okamžitých mikroskopických polí (z M.–L. rovnic) přes “dostatečně velké” objemy a “dostatečně dlouhé” časy, které jsou měřeny přístroji. Nábojové a proudové hustoty jsou při středování rozděleny na volné (ρ a \vec{j} vystupující v získaných rovnicích) a vázané, které jsou zahrnuty v následujících vztazích:

$$\text{Elektrická indukce } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad [\vec{D}] = Cm^{-2}$$

Vektor polarizace $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}, t)$ – průměrný elektrický dipólový moment v jednotce objemu, makroskopický dipólový moment $\vec{p} = \int_V \vec{P} dV$

celková hustota náboje $\rho_c = \rho + \rho_b$ hustota vázaných nábojů $\rho_b = - \text{div } \vec{P}$

$$\text{Intenzita magnetického pole } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad [\vec{H}] = Am^{-1}$$

Vektor magnetizace $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r}, t)$ – hustota mag. dipol. momentu, makroskopický mag. dipol. moment $\vec{m} = \int_V \vec{M} dV$

celková proudová hustota $\vec{j}_c = \vec{j} + \vec{j}_p + \vec{j}_m$ polarizační proud $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

magnetizační proud $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$

$$\text{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\text{div } \varepsilon_0 \vec{E} = \rho - \text{div } \vec{P} = \rho_c$$

$$\text{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) - \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} = \vec{j}$$

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{M} = \vec{j}_c$$

Materiálové vztahy

Vektory polarizace a magnetizace závisí na vnitřní stavbě látky i na e.m. poli. Pro konkrétní látky se tato závislost určuje experimentálně.

V lineární prostředí (ideálně měkká dielektrika), které je homogenní a izotropní platí v případě slabých (vzhledem k lokálním polím) středních polí \vec{E} , \vec{B} vztahy:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

permitivita $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ permeabilita $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$

Rychlost e.m. vlny v prostředí $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ Index lomu $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

V anizotropních prostředích jsou veličiny elektrická a magnetická susceptibilita χ_e, χ_m (a tedy i ε, μ) symetrické tenzory, v nehomogenních prostředích závisí na poloze, v nelineárních prostředích na polích \vec{E} , \vec{B} dále mohou záviset na teplotě a nebo na frekvenci se kterou se mění e.m. pole.

Dále budeme uvažovat pouze prostředí podmínky za kterých jsou ε, μ reálné konstanty. V takových prostředích mají Mawellovy rovnice tvar

I. série $\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$ $\boxed{\text{rot } \vec{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}}$

II. série $\boxed{\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$ $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$

V případě stacionárních (časově nezávislých) polí \vec{E} a \vec{B} se rovnice rozpadají na dvě nezávislé soustavy rovnic – jednu pro \vec{E} a druhou pro \vec{B} .

Helmholtzův teorém

Bud' \vec{F} vektorové pole třídy C^2 na omezené oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ pak

$$\vec{F} = -\nabla\Phi + \text{rot } \vec{A} \quad \text{kde} \quad \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{S}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{S}'$$

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (II. série)

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{solenoidální pole } \vec{B} \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \quad \text{Vektorový potenciál } \boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}} \quad (\text{div rot } \vec{A} = 0)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{potenciální pole } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists \varphi = \varphi(\vec{r}, t) \quad \text{Skalární potenciál } \boxed{\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (\text{rot grad } \varphi = 0)$$

Kalibrační transformace

Přiřazení dvojice potenciálů (\vec{A}, φ) k e.m. poli (\vec{E}, \vec{B}) není jednoznačné. Konkrétní výběr dvojice (\vec{A}, φ) k popisu e.m. pole se nazývá *kalibrací* a přechod mezi různými kalibracemi *kalibrační transformací*. Říkáme, že (\vec{A}, φ) a (\vec{A}', φ') jsou *kalibračně ekvivalentní* popisují-li totéž pole (\vec{E}, \vec{B}) .

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B} = \text{rot } \vec{A}' \quad -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} = -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\vec{A}' - \vec{A}) = 0 \Rightarrow \exists \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t) \quad 0 = \nabla(\varphi' - \varphi) + \frac{\partial(\vec{A}' - \vec{A})}{\partial t} = \nabla(\varphi' - \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t})$$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda(\vec{r}, t)} \quad \boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}}$$

Kalibrační transformace tedy nemění měřitelné veličiny \vec{E} a \vec{B} (jsou tzv. kalibračně invariantní) ale pouze parametrizaci polí.

Řešení Maxwellových rovnic pomocí potenciálů (I. série)

$$\mu \vec{j} = \text{rot rot } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} + \varepsilon \mu \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \text{div } \vec{E} = \text{div}(-\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta \varphi - \text{div}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu \vec{j} + \text{grad}(\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \\ \Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \end{aligned} \right\} \textcircled{a} \quad \text{jsou kalibračně invariantní}$$

Lorenzova kalibrační podmínka (L.V.Lorenz) $\boxed{\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$

Oprávněnost Lorenzovy kalibrace

Pokud \vec{A}, φ řeší rce. \textcircled{a} a nespĺňují Lorenzovu kalibrační podmínku, pak mezi řešeními \textcircled{a} existují kalibračně ekvivalentní \vec{A}', φ' které ji splňují.

$$0 = \text{div } \vec{A}' + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \text{div grad } \Lambda + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$\Delta \Lambda - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = -(\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$ nehomogenní vlnová rovnice pro Λ - má nekonečně mnoho řešení

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.) Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Nehomogenní vlnové (d'Alembertovy) rovnice pro potenciály

V prostředí (kde $\varepsilon_r, \mu_r \in \mathbb{R}$ kons.) Speciálně ve vakuu ($\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$)

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

d'Alembertův operátor (dalambertián) $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Tyto rovnice jsou invariantní vůči kalibračním transformacím splňujícím podmínku $\Delta \Lambda - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda$$

$$-\frac{\rho}{\varepsilon} = \Delta \varphi' - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = \Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \Lambda - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)$$

$$-\mu \vec{j} = \Delta \vec{A}' - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \left(\Delta \Lambda - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\Delta \Lambda - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \right)$$

Řešení tedy není jednoznačné.

Například v případě $\rho = 0$ lze požadovat $\varphi' = 0$

$$\Delta \vec{A}' - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

$$\varphi' = 0$$

$\operatorname{div} \vec{A}' = 0$... Coulombova kalibrace