

Teoretická fyzika 1 – Analytická Mechanika

Kniha: Klasická teoretická fyzika,
I. Štoll, J. Tolar, I. Jex, Karolinum 2017

Mechanika klasická /relativistická /kvantová

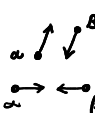

– Newtonova mechanika (používá vektory)

Isaac Newton – 1. dílo teoretické fyziky

Matematické principy přírodní filozofie (1687)

1. Zákon setrvačnosti – inerciální vztažná soustava

2. Zákon síly $\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$

3. Zákon akce a reakce $\vec{F}_{\alpha\beta} = -\vec{F}_{\beta\alpha}$ slabá verze  silná verze 

Gravitační zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -G \frac{m_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|^3} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \quad G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

síla kterou působí B na A

Newtonovy pohybové rce. $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$

– Analytická mechanika (používá skaláry)

Soubor alternativních formulací klasické mechaniky vycházejících z tzv. principů mechaniky.

Gottfried Wilhelm Leibniz – živá síla $m\dot{v}^2 = 2T$

Maupertuis, Bernoulli, Euler, d'Alembert, Laplace

Principy mechaniky \Rightarrow pohybové rovnice.

Např: "Při pohybu soustavy mezi dvěma konfiguracemi je

$$S = \langle T \rangle - \langle U \rangle \text{ minimální.}"$$

(Fermatův princip 1662 – šíření světla)

– Lagrangeova mechanika 1788

– Hamiltonova mechanika 1833

– Hamilton–Jacobiho rovnice

Analytická Mechanika

výhody – eliminace síly, snadné zobecnění mimo oblast mechaniky (teorie pole, kvantová mechanika)

– efektivita pro složité úlohy s vazbami, elegance, možnost užití vyšší matematiky

Lagrangeův formalismus – nejprve pro soustavu volných hmotných bodů

Počet stupňů volnosti Δ = nejmenší počet parametrů nutných k určení polohy (konfigurace) soustavy (počet navzájem nezávislých pohybů, které může soustava konat – pouze pro holonomní vazby)

• pro soustavu $N \in \mathbb{N}$ volných hmotných bodů v 3-dimenzionálním prostoru je $\Delta = 3N$

• konfiguraci soustavy (polohu všech jejích bodů) budeme reprezentovat jediným bodem $\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ v $3N$ rozměrném euklidovském prostoru tzv. **konfiguračním prostoru**

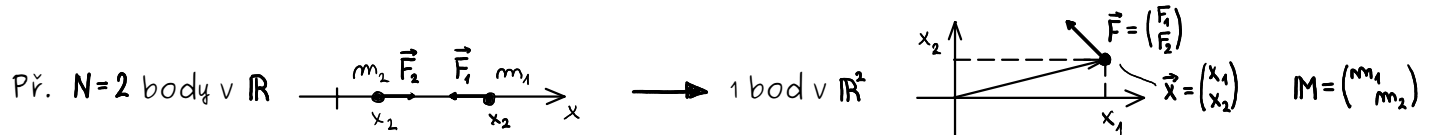
$$\vec{x} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = (\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \dots, \pi_{N,3}) = (x_1, \dots, x_{3N}) \quad \text{kartézské souřadnice} \quad \pi_{\alpha,i} = x_{(\alpha-1)N+i}$$

• hmotnosti $m_1 = m_2 = m_3$ hmotnost 1. bodu
 $m_4 = m_5 = m_6$ hmotnost 2. bodu
 \vdots

$$(x_1, x_2, x_3) = \vec{r}_1 \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \frac{\partial \pi_{\alpha,i}}{\partial \pi_{\beta,j}} = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{ij}$$

$$(x_4, x_5, x_6) = \vec{r}_2$$

hmotnosti budeme místo jednotlivým bodům přiřazovat jednotlivým stupňům volnosti $M = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_{3N} \end{pmatrix}$



Derivace funkce podle času:

$$F: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, F = F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

1) parciální derivace $\frac{\partial}{\partial \lambda}$

$\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t$ jsou nezávislé proměnné fce. F

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t + \Delta \lambda) - F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\Delta \lambda}$$

2) funkce jedné proměnné $\frac{d}{dt}$

složená funkce času

$$\ddot{F}(t) = \frac{d\dot{F}(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)}$$

parciální derivace jsou vypočteny v bodě

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \quad \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

$$\ddot{F}(t) = F(\ddot{\vec{x}}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

implicitní a explicitní závislost na čase

Einsteinova sumace !!!

3) operátor úplné (totální) $\frac{d}{dt}$
časové derivace

$$\dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{d}{dt} F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}$$

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad i = 1$$

$$F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

$$\downarrow \vec{x} = \vec{x}(t) \quad \downarrow \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(t)$$

$$\dot{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \ddot{F}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) \leftarrow \ddot{F}(t)$$

Začínat s popisem budeme vždy v inerciální vztažné soustavě (v kartézských souřadnicích).

Newtonovy rovnice $m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{F}_a \quad \forall a \in \hat{N} \rightarrow m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \hat{3N}$ nebo $M \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

V neinerciální soustavě bychom museli přidat setrvačné síly a najít pro ně potenciály.

• upravíme levou stranu rovnic $m_i \ddot{x}_i = F_i \quad \forall i \in \hat{3N}$ (tj. bez sumace přes i)

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = F_i \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{x}_j^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_j m_j 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \delta_{ji} = m_i \dot{x}_i \quad \forall i \in \hat{3N}$$

kinetická energie soustavy $T(\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2$ má v kartézských souřadnicích vždy tento tvar

• síly vtíštěné (akční) na pravé straně rovnic nahradíme potenciály \rightarrow silové pole (síla) \vec{F} se nazývá:

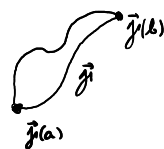
1) konzervativní $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ pokud $\exists U = U(\vec{x})$ potenciální energie tak, že $F_j(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{3}$

2) potenciální $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, t)$ potenciál tak, že $F_j(\vec{x}, t) = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial x_j} \quad \forall j \in \hat{3}$

3) zobecněná potenciální $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ pokud $\exists U = U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ tak, že (souhrnně tzv. monogenní síly – Goldstein) zobecněný potenciál $F_j(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} \right) \quad \forall j \in \hat{3}$

Pozn. práce konzervativních sil nezávisí na trajektorii

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = - \int_a^b \frac{dU(\vec{r}(t))}{dt} dt$$



Pozn. v \mathbb{R}^3 podmínka $\text{rot } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}, t)$ je potenciální

$$= - [U(\vec{r}(t))]_a^b = U(\vec{r}(a)) - U(\vec{r}(b))$$

Př. - homogenní tíhové pole $U(\vec{x}) = -m\vec{g} \cdot \vec{x}$

- Lorentzova síla (E.M. pole)

- centrální gravitační pole $U(\vec{x}) = -\mathcal{H} \frac{Mm}{|\vec{x}|}$

$$U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q(\varphi(\vec{x}, t) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t))$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- harmonický oscilátor (elastické pole) $U(\vec{x}) = \frac{1}{2} K(\sqrt{x^2} - a_0)^2$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

• LR1D $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = F_i = F_i^{(nep)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i}$

$T = T(\dot{\vec{x}})$ tj. $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} \quad F_i^{(pot)}$$

Lagrangeova funkce (v kartézských)

$$L = T - U$$

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j^2 - U(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

Po výpočtení derivací funkce L dosadíme za x_i neznámé funkce času $\vec{x}_i(t)$ a získáme tak obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu pro tyto neznámé funkce.

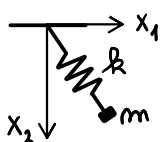
Pozn: Lagrangeovy funkce dvou neinteragujících soustav lze sečíst a získat Lagr. fci. popisující obě soustavy.

• Nejednoznačnost Lagrangeovy funkce $L' = L + \frac{d}{dt} h(\vec{x}, t) \quad h = h(\vec{x}, t) \in C^2 \quad \frac{d}{dt} h = \frac{\partial h}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d}{dt} h = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{d}{dt} h \right) = \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$= LS + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_j + \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial t} = LS \Rightarrow L \text{ a } L' \text{ vedou na stejné LR1D}$$

Př. rovinný izotropní harmonický oscilátor



$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad U = \frac{1}{2} k(x_1^2 + x_2^2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} k(x_1^2 + x_2^2)$$

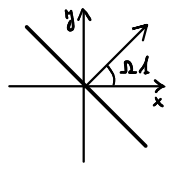
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1) - (-kx_1) = m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_2) - (-kx_2) = m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$$

Vazby, Konfigurační prostor a obecné souřadnice

Vazby - jakékoliv podmínky omezující pohyb hm. bodů nebo těles tvořících mechanickou soustavu

- holonomní - vazby které snižují počet stupňů volnosti, lze je zapsat ve tvaru $f_k(\vec{x}, t) = 0, \forall k \in \hat{n}$
- neholonomní - všechny ostatní (např. $g(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = 0, |\dot{\vec{x}}| \leq k$)
- skleronomní (stacionární) - nezávislé na čase (např. $f(\vec{x}) = 0, x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$)
- rheonomní (nestacionární) - závislé na čase (např. $g(x, y, t) = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t = 0$)
- udržující (oboustranné) - vyjádřené pomocí rovností =
- neudržující (jednostranné) - vyjádřené pomocí nerovností $>, \geq$
- ideální - nedochází k disipaci mechanické energie (virtuální práce vazebných sil je nula)
- neideální - dochází k disipaci energie (např. tření)



Pozn: zřečtiny holos=celý nomos=zákon sklerós=pevný, tvrdý rheó=teče, plyne

Pozn. Holonomní vazba je vždy udržující.

skrytě holonomní vazby (semiholonomní) - vazby afinní v rychlostech, které lze nahradit holonomními

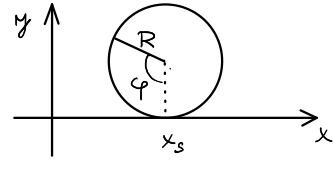
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i(\vec{x}, t) \dot{x}_i + b(\vec{x}, t) = 0 \quad | \cdot d\lambda \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3N} \underbrace{a_i(\vec{x}, t)}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} dx_i + \underbrace{b(\vec{x}, t)}_{\frac{\partial f}{\partial \lambda}} d\lambda = 0$$

pokud je tato diferenciální forma exaktní tj. existuje $f = f(\vec{x}, \lambda), df = \omega$ pak je vazba skrytě holonomní

Vazba je skrytě holonomní pokud $\exists \mu = \mu(\vec{x}, t) \neq 0$ (integrační faktor $\mu \omega = d\lambda$) a platí podmínky:

$$\frac{\partial(\mu a_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu a_j)}{\partial x_i} \quad \frac{\partial(\mu a_i)}{\partial \lambda} = \frac{\partial(\mu b)}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in \hat{3N}$$

Př. Valení válce bez prokluzování (vzájemná rychlost bodů dotyku je nulová)



$$\dot{x}_s - R\dot{\varphi} = 0 \quad | \int d\lambda \quad \int \dot{x}_s d\lambda - \int R\dot{\varphi} d\lambda = 0$$

$$dx_s - R d\varphi = 0 \quad \frac{dx_s}{d\varphi} = R$$

$$f(x_s, \varphi) = x_s - R\varphi = 0 \quad | \text{ je holonomní}$$

Př. Valení kotouče po rovině bez prokluzování a naklánění - neholonomní vazby neexistuje $f(x, y, \varphi, \dot{\varphi}) = 0$

$$\dot{x} - R\dot{\varphi} \cos \varphi = 0 \quad \dot{y} - R\dot{\varphi} \sin \varphi = 0$$

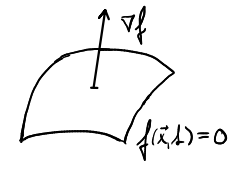
Holonomní soustava - soustava, která je podrobena pouze holonomním nebo semiholonomním vazbám - dále budeme pracovat pouze s holonomními soustavami a zapisovat všechny jejich vazby jako holonomní

Vazbové síly holonomních vazeb (Reakční síly) - nejsou známé předem (na rozdíl od akčních sil)

$$\vec{F}^{(vaz)} = \vec{T} + \vec{N} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{pro jednu vazbu } f(\vec{x}, t) = 0$$

↑ ↑
tečná a normálová složka

$$\vec{N} = \lambda \nabla f \quad N_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall i \in \hat{3N}$$



holonomní vazba $\left\{ \begin{array}{l} \text{hladká } \vec{T} = 0 \text{ (ideální)} \\ \text{drsna } \vec{T} \neq 0 \text{ (tření, neideální)} \end{array} \right.$

Př. izotropní vlečné tření $\vec{T} = -k|\lambda \nabla f| \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Lagrangeův multiplikátor λ

- určuje velikost vazbové síly
- představuje novou neznámou fci. $\lambda = \lambda(t) = ?$ která se objeví v pohybových rovnicích

pro $\pi \in \mathbb{N}$ hladkých holonomních vazeb $f_k(\vec{x}, t) = 0$ platí $F_i^{(vaz)} = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$

Pozn. Nebude-li řečeno jinak, pak holonomní vazbu považujeme vždy za hladkou.

Konfigurační prostor (varieta)... množina všech možných konfigurací (poloh všech bodů) soustavy

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_k(\vec{x}, t) = 0 \forall k \in \hat{n} \} \subseteq \mathbb{R}^{3N} \quad \text{dimenze } M(t) = \text{dimenze tečného prostoru } k \text{ } M(t)$$

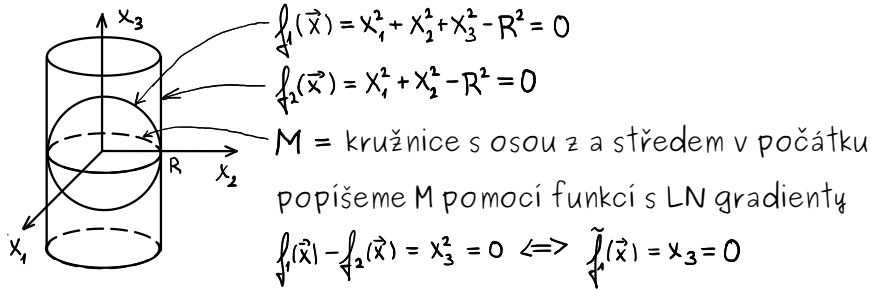
Vazby jsou nezávislé, pokud nelze žádnou z nich vynechat, aniž by se změnil konfigurační prostor.

Pokud je $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_\pi) \forall \vec{x} \in M(\lambda), \forall \lambda$ lineárně nezávislý soubor vektorů, pak jsou vazby nezávislé a platí $\dim M(\lambda) = 3N - \pi = \Delta$ (počet stupňů volnosti). $f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$
"obecné rovnice" konf. prostoru

Jsou-li vazby závislé, pak přebytečné vazby vypustíme a zbýlých π nezávislých vazeb zapíšeme v takovém tvaru, aby jejich gradienty tvořily lineárně nezávislý soubor tj. aby hodnost matice

$$h \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\pi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\pi}{\partial x_{3N}} \end{pmatrix} = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(\lambda) \quad \forall \lambda.$$

Př. bod na povrchu koule a válce



$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LZ pro } x_3 = 0$$

$$\nabla \tilde{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ jsou LN na } M$$

Obecné souřadnice φ $x_1 = R \cos \varphi$
 $\Delta = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ $x_2 = R \sin \varphi$
 $x_3 = 0$

• soustava N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ (nezávislými) holonomními vazbami $f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ (fce. třídy C^1)

Lagrangeovy rovnice 1. druhu (1775)

- pro soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami v inerciální vztahné soustavě (kartézské souřadnice) získáme přidáním rovnic vazeb a vazebných sil do původních rovnic
 - $3N$ obyčejných diferenciálních rovnic II. řádu a π algebraických rovnic pro $3N + \pi$ neznámých funkcí $x_i(\lambda) = ? \quad i \in \hat{3N}, \lambda_k(\lambda) = ? \quad k \in \hat{\pi}$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \lambda) + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{\pi} T_i^{(k)} = 0$$

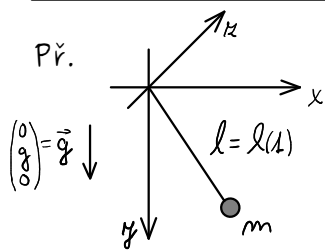
$f_j(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall j \in \hat{\pi} \quad \forall i \in \hat{3N}$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(m\ddot{x})} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{\pi} T_i^{(k)} = 0$$

$f_j(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall j \in \hat{\pi} \quad \forall i \in \hat{3N}$

Pokud vazby nejsou hladké pak se tečné složky vazebných sil obvykle zahrnou mezi zbylé nepotenciální síly.

Pozn. $L'(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \lambda) = L + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k f_k \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = 0$



vazby: $f_1(x) = x = 0$
 $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2(\lambda) = 0$

$\vec{F}_1^{(vazb)} = \lambda_1 \nabla f_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{F}_2^{(vazb)} = \lambda_2 \nabla f_2 = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 + 0 + 2\lambda_2 x \\ m\ddot{y} = mg + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = mg + 0 + 2\lambda_2 y \\ m\ddot{z} = 0 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 + \lambda_1 + 0 \end{cases} \begin{cases} y\ddot{x} - x\ddot{y} = -xg \\ \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 = \frac{m\ddot{x}}{2x} \end{cases}$$

substituce $x = l \sin \varphi$ $y = l \cos \varphi$ $2l\ddot{\varphi} + l^2 \ddot{\varphi} + gl \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi(\lambda)$

Obecné (zobecněné) souřadnice $q_j \quad j \in \hat{\Delta}$ - parametry, které jednoznačně popisují možné konfigurace soustavy (lokální souřadnice na konfigurační varietě)

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}, \lambda) \quad \vec{x}: \mathbb{R}^{\Delta+1} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$

POZOR $\vec{q} = (q_1, \dots, q_\Delta)$ již není vektor, ale jen uspořádaná s-tice

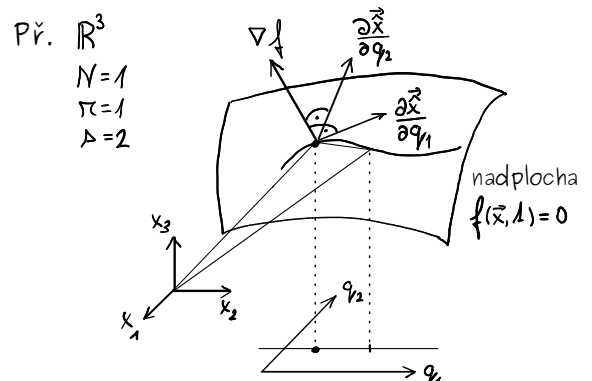
$x_i = \hat{x}_i(q_1, \dots, q_\Delta, \lambda) \quad i \in \hat{3N}$ parametrické rovnice konf. prostoru (z věty o implicitní funkci) $h \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) = \Delta$

funkce třídy C^2 zvolené tak, aby splnily vazby:

$f_k(\vec{q}, \lambda) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, \lambda), \lambda) \equiv 0 \quad \forall \vec{q} \quad \forall \lambda \quad \forall k \in \hat{\pi}$

$0 = \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \nabla f_k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_j}$
 - skalární součin
 - tečný vektor k j -té souřadnicové křivce ležící v nadploše
 - normálový vektor k nadploše $f_k(\vec{x}, \lambda) = 0$

Pozn. závislost na čase je dána vývojem vazby, v případě skleronomních vazeb bude $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}) \quad \forall i \in \hat{3N}$



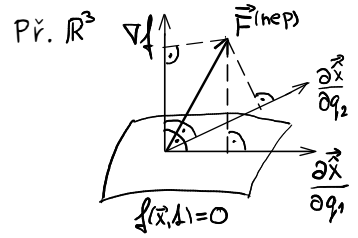
Lagrangeovy rovnice 2. druhu (pro holonomní soustavu N hm. bodů s $\pi \in \mathbb{N}_0$ nezávislými vazbami)

Lagr. rce. 1. druhu: $f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{\pi}$ převedeme do obecných souřadnic $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, \lambda) \quad \forall i \in \hat{3N}$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \forall i \in \hat{3N}$ tím splníme rovnice vazeb $\hat{f}_k(\vec{q}, \lambda) = f_k(\vec{x}(\vec{q}, \lambda), \lambda) \equiv 0 \quad \forall k \in \hat{\pi} \quad \forall \vec{q} \quad \forall \lambda$

Zbýlých $3N$ diferenciálních rovnic vezmeme jako sloupcový vektor a přenásobíme maticí S^T

kde $S = \left(\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \hat{x}_1}{\partial q_n}, \dots, \frac{\partial \hat{x}_{3N}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \hat{x}_{3N}}{\partial q_n} \right)$ je regulární matice řádu $3N \times 3N$

báze tečného a normálového prostoru ke configuračnímu prostoru $M(\lambda)$



(1) $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}}_{Q_j^{(nep)}} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{\nabla f_k} \underbrace{\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j}}_{=0}$ prvních s rovnic $\forall j \in \hat{\Lambda} \quad / \quad \sum_{i=1}^{3N}$

(2) $\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{\nabla f_k} \underbrace{\frac{\partial f_l}{\partial x_i}}_{\nabla f_l} = G_{kl}$ dalších r rovnic $\forall l \in \hat{\pi} \quad / \quad \sum_{i=1}^{3N} \quad / \quad \cdot (G^{-1})_{lm}$
 prvky Gramovy matice souboru $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_r)$
 $\det G = \det(G_{kl}) \neq 0 \Leftrightarrow$ je LN soubor

$(G^{-1})_{lm} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial f_l}{\partial x_i} F_i^{(nep)} \right) = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k G_{kl} (G^{-1})_{lm} = \sum_{k=1}^{\pi} \lambda_k \delta_{km} = \lambda_m \quad \forall m \in \hat{\pi} \quad / \quad \sum_{i=1}^{3N}$

Tím je těchto r rovnic vyřešeno. Dále upravíme levou stranu prvních s rovnic. K tomu využijeme:

$\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{jk} = \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = 0 = \frac{\partial q_k}{\partial q_j} \quad x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, \lambda) \quad \dot{x}_i = \dot{\hat{x}}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \quad \dot{x}_i = \hat{\dot{x}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$

obecné souřadnice a rychlosti jsou navzájem nezávislé

1) $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$ 2) $\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + 0 = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta_{jk} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k}$ "pravidlo krácení teček"

3) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial \lambda \partial q_j} \dot{\lambda} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d \hat{x}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j}$

$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} =$
 $= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{\hat{x}}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j}$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} \quad \forall j \in \hat{\Lambda}$

- neobsahují vazbové síly (ideálních holonomních vazeb)
- jejich tvar nezávisí na konkrétní volbě obecných souřadnic
- rovnice pro proměnné $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$, dosazením $q_i = \tilde{q}_i(t), \dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i(t), \ddot{q}_i = \ddot{\tilde{q}}_i(t)$ dostaneme obvyčejné difr. 2. řádu

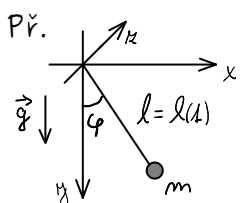
Obecná nepotenciální síla

$Q_j^{(nep)} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} F_i^{(nep)}$

Lagrangeova funkce (v obecných) - není určena jednoznačně

$\hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = L(\vec{x}(\vec{q}, \lambda), \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda), \lambda) \quad \hat{L}' = \hat{L} + \frac{\partial}{\partial \lambda} h(\vec{q}, \lambda)$

při $Q_j^{(nep)} = 0$ plně charakterizuje holonomní soustavu s ideálními vazbami



vazby: $f_1(x) = x = 0$
 $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$
 $\Delta = 3 - 2 = 1$

obecné souřadnice φ

$x = l(\lambda) \sin \varphi$
 $y = l(\lambda) \cos \varphi$
 $\dot{x} = 0$

$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$

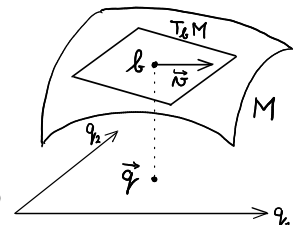
$\hat{L} = \frac{1}{2} m (l^2(\lambda) \dot{\varphi}^2) + mgl(\lambda) \cos \varphi$

LR2.D $0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m l^2(\lambda) \dot{\varphi}) - (-mgl(\lambda) \sin \varphi) = 2m l(\lambda) \dot{l}(\lambda) \dot{\varphi} + m l^2(\lambda) \ddot{\varphi} + mgl(\lambda) \sin \varphi$

Pozorovatelné veličiny (polohy, rychlosti, hybnosti, momenty, síly, energie ...)

jsou funkce $2\Delta+1$ proměnných $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda$ na tzv.

rozšířeném rychlostním fázovém prostoru $\underbrace{TM}_{\text{tečný bandl}} \times \mathbb{R}$ kde $TM = \bigcup_{b \in M} T_b M$
 tečný prostor k M v bodě b



Kinetická energie v obecných souřadnicích

$$\hat{T}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = T(\dot{\vec{X}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{X}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} T_{kl}(\vec{q}, \lambda) \dot{q}_k \dot{q}_l + \beta_k(\vec{q}, \lambda) \dot{q}_k + \alpha(\vec{q}, \lambda)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{P.D.}}$

• pokud jsou všechny vazby skleronomní pak $\hat{T}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} T_{kl}(\vec{q}) \dot{q}_k \dot{q}_l$ je homogenní stupně 2 v rychlostech

Obecná síla $Q_j = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} + Q_j^{(nep)}$

Obecná (kanonická) hybnost $f_j = f_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$
 (nemusí mít rozměr hybnosti)

Pozn. LR2D: $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j^{(nep)} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_j} \Leftrightarrow \dot{f}_j = Q_j$ Příklad: $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - e(\varphi - \dot{x}_i A_i)$ $f_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j + e A_j \neq m \dot{x}_j$

Obecná energie

$$E = E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \sum_{j=1}^{\Delta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \hat{L}$$

(má rozměr energie)

$$E = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \hat{L} = \underbrace{\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j}_{=2\hat{T}} - \underbrace{\hat{L}}_{=0} = 2\hat{T} - \hat{L} = \hat{T} + \hat{U}$$

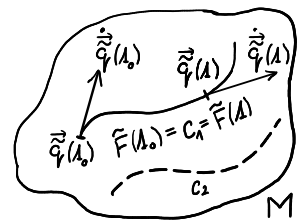
Pokud je \hat{T} homogenní fce. 2. stupně v rychlostech $\dot{\vec{q}}$ (všechny vazby jsou skleronomní) a $\frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} = 0 \forall j \in \Delta$ pak E je celková mechanická energie soustavy.

Integrály pohybu (zákonů zachování) – jsou 1. integrály pohyb. rovnic, fce. konstantní podél trajektorie

Funkce $F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$ je integrálem pohybu pro systém popsaný pohybovými rovnicemi $\vec{R}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = 0$, pokud pro každé jejich řešení $\vec{q} = \vec{q}(\lambda)$ (tzv. trajektorii) $\exists c \in \mathbb{R}$ tak, že $\tilde{F}(\lambda) = F(\vec{q}(\lambda), \dot{\vec{q}}(\lambda), \lambda) = c \forall \lambda$.

Funkce $F = F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$ je I.P. $\Leftrightarrow 0 = \frac{dF}{d\lambda} \Big|_{\vec{R}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = 0} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\vec{R}=0}$

$\Rightarrow \ddot{q}_i = G_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$



ověřit, že F je I.P. znamená řešit LR2D jako lineární algebraické rovnice pro $\ddot{\vec{q}}$ a toto řešení dosadit do $\frac{dF}{d\lambda} = 0$

Dále budeme předpokládat, že na soustavu nepůsobí žádné nepotenciální síly tj. $Q_j^{(nep)} = 0$, pak lze některé integrály pohybu nalézt na základě chybějících proměnných v předpisu Lagrangeovy funkce:

1) čas λ $\hat{L} = \hat{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow$ obecná energie $E = E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \text{konst.}$ je I.P.

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \hat{L} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} \right] = \dot{q}_i \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} \right] - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} = \dot{q}_i \underbrace{Q_j^{(nep)}}_{=0} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Pozn. Obecná energie holonomní soustavy se skleronomními vazbami a konzervativními silami je konstantní.

LR2D $\stackrel{Q_j^{(nep)}}{=} 0$ výkon sil nepotenciálních

2) cyklická souřadnice $q_k, k \in \Delta$ tj. $\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow$ obecná hybnost $f_k = f_k(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \text{konst.}$ je I.P.

je souřadnice, na které Lagr. fce. \hat{L} nezávisí

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)} = 0 \Rightarrow \frac{d f_k}{d\lambda} = 0 \text{ tj. } \dot{f}_k = 0$$

Pozn. 3) $\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(nep)} = 0$ nenastává

Teorém Noetherové (1915) spojité symetrie \rightarrow zákony zachování

"Ke každé jednoparametrické grupě transformací konfiguračního prostoru které ponechávají Lagrangeovu funkci invariantní (symetrie Lagr. fce.) existuje integrál pohybu."

Grupou G je každá neprázdná množina spolu s operací (součin) $\cdot: G \times G \rightarrow G$ splňující:

- 1, $\forall a, b, c \in G \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ asociativita
 - 2, $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad a \cdot e = e \cdot a = a$ jednotka
 - 3, $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G \quad a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$ inverzní prvek
- Př. $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}/\{0\}, \cdot)$
 $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \mid \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}$

Transformace (aktivní) $\phi^\varepsilon \in \text{Dif}(M)$ je zde bijekce $\phi^\varepsilon: M \rightarrow M$ taková, že ϕ^ε a $(\phi^\varepsilon)^{-1}$ jsou třídy C^1 .

Jednoparametrická grupa transformací M je spojitý homomorfismus grup $\phi: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Dif}(M), \circ)$
 $\phi: \varepsilon \rightarrow \phi^\varepsilon \quad \phi^0 = \text{Id} \quad \phi^{\varepsilon+\delta} = \phi^\varepsilon \circ \phi^\delta \quad (\phi^\varepsilon)^{-1} = \phi^{-\varepsilon}$

Znění, které dokážeme:

Transformace (aktivní) Invariance Lagrangeovy funkce $\forall \vec{q} \forall \dot{\vec{q}} \forall \lambda \forall \varepsilon$
 $q_j^1 = q_j^1(\vec{q}, \varepsilon) = \phi_j^\varepsilon(\vec{q})$ fce. třídy C^2 , $\det \left(\frac{\partial q_j^1}{\partial q_k} \right) \neq 0$
 $q_j^1(\vec{q}, 0) = q_j$ $\forall j \in \hat{A}$
 $\dot{q}_j^1 = \dot{q}_j^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \varepsilon) = \phi_{x_j}^\varepsilon(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\hat{d} q_j^1}{d\lambda} = \frac{\partial q_j^1}{\partial q_k} \dot{q}_k$
 $L^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \varepsilon) := L(\vec{q}^1(\vec{q}, \varepsilon), \dot{\vec{q}}^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \varepsilon), \lambda) = L(\vec{q}^1, \dot{\vec{q}}^1, \lambda)$
 \Downarrow
 Veličina $I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \sum_{k=1}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$ je I.P.

Důkaz: invariance $L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \forall \vec{q} \forall \dot{\vec{q}} \forall \lambda$

$$0 = \frac{\partial L^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \varepsilon)} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)} \cdot \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} + \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} =$$

$$\frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\hat{d} q_k^1}{d\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial q_r} \dot{q}_r \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial q_r} \right) \dot{q}_r = \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right) \dot{q}_r = \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right)$$

zeslabíme požadavky z $\forall \varepsilon$
 na $\varepsilon = 0$ a dosadíme z LR2D
 $0 = \frac{\partial L^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \Big|_{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)} \cdot \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\hat{d}}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k^1}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \Big|_{\vec{R}=0} = \frac{\hat{d}}{d\lambda} (I) \Big|_{\vec{R}=0}$
 $LR2D \quad \vec{R}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = 0 \Rightarrow -Q_i^{(nep)} = 0 \quad \forall i \in \hat{A} \quad QED.$

Pozn. $L^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \varepsilon) = L^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, 0) + \frac{\partial L^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ $0 = \frac{\partial L^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [L^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda, \varepsilon) - L^1(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)]$

Infinitezimální verze teorému:

Transformace (Taylorův rozvoj do 1. řádu v ε) Invariance L do 1. řádu v $\varepsilon \quad \forall \vec{q} \forall \dot{\vec{q}} \forall \lambda$
 $q_j^1 = q_j^1(\vec{q}, 0) + \frac{\partial q_j^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2) = q_j + Y_j \cdot \varepsilon \quad Y_j = \frac{\partial q_j^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = Y_j(\vec{q})$
 $\frac{\partial L^1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q_k} Y_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{Y}_k = 0$
 $\dot{q}_j^1 = \frac{\hat{d} q_j^1}{d\lambda} = \dot{q}_j + \dot{Y}_j \cdot \varepsilon$ kde $\dot{Y}_j = \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$ vektorové pole tzv. generátor transformace
 Veličina $I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \sum_{k=1}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} Y_k$ je I.P.

Př. rotace kolem osy x_3 Infinitezimálně
 $x_1^1 = x_1 \cos \varepsilon - x_2 \sin \varepsilon \quad Y_1 = \left(\frac{\partial x_1^1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = (-x_1 \sin \varepsilon - x_2 \cos \varepsilon)_{\varepsilon=0} = -x_2$ $x_1^1 = x_1 - x_2 \varepsilon$
 $x_2^1 = x_1 \sin \varepsilon + x_2 \cos \varepsilon \quad Y_2 = \left(\frac{\partial x_2^1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = (x_1 \cos \varepsilon - x_2 \sin \varepsilon)_{\varepsilon=0} = x_1$ $x_2^1 = x_2 + x_1 \varepsilon$
 $x_3^1 = x_3 \quad Y_3 = \left(\frac{\partial x_3^1}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$ $x_3^1 = x_3$
 $\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \mathbb{1} \vec{x} + \varepsilon \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^A \vec{x}$

Pokud $L(\vec{x}^1, \dot{\vec{x}}^1, \lambda) = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \lambda) \Rightarrow I = \sum_{i=1}^A \frac{\partial L}{\partial x_i} Y_i = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 = f_1(-x_2) + f_2 x_1 + 0 = L_3$
 (pro infinitezimální do 1. řádu v ε)
 $\exp(\varepsilon/A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k / A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Základní principy mechaniky

– jiné matematicky ekvivalentní formulace zákonů mechaniky

• Diferenciální principy – určují chování mechanické soustavy (trajektorii) lokálně v okolí daného bodu

1) Princip virtuální práce (Bernoulli 1708–1717) – statická rovnováha systému N částic:

Statická rovnováha (rovnovážná konfigurace) soustavy částic nastává pokud $\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} X_{0,1} \\ \vdots \\ X_{0,3N} \end{pmatrix}$ jsou souřadnice všech částic konstantní.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{X}}(t) = 0, \dot{\vec{X}}(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{\vec{F}(\vec{X}_0, 0) = 0 \quad \forall t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\vec{x}_0, 0)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{uvažujeme pouze síly nezávislé na čase}$$

$$\Leftarrow \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0, \dot{\vec{X}}(t_0) = 0, m_i \ddot{\vec{x}}_i(t_0) = \vec{F}_i(\vec{X}_0, 0) = 0 \quad \forall i \in \widehat{3N} \Rightarrow m_i \ddot{\vec{x}}_i(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \vec{F}_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_j \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0, 0) \dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \dot{x}_j}(\vec{x}_0, 0) \ddot{x}_j(t_0) = 0$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(t_0) + \dot{\vec{X}}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{X}}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots = \vec{X}_0$$

omezíme se na analytické funkce, $x(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ \neq 0 & t \neq 0 \end{cases}$ neplatí to pro tzv. flat funkce (můžeme Taylor as 0)

a) volných

$$(2NZ) \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \Leftrightarrow 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x} \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \text{Vektor } \delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}_0 \text{ je (virtuální) posunutí z rovnovážné polohy } \vec{X}_0 \text{ do bodu } \vec{x}$$

(stačilo by pro lib. bázi \mathbb{R}^{3N})
stačí libovolně malé – infinitezimální

Pozn. práce $A = \int \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ je integrál z diferenciální formy $dA(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ po křivce γ (kdy $d\vec{x} = \gamma'(t) dt$)
musí být malé (infinitezimální)

Virtuální práce $\delta A(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i$ Princip virtuální práce:

je práce sil při virtuálních posunutích \vec{x}_0 je rovnovážná konfigurace $\Leftrightarrow \delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x}$

Pozn. Variace funkce $f = f(\vec{x}, t)$ $f(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_i \delta x_j + \dots = f(\vec{x}, t) + \delta f(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} \delta^2 f(\vec{x}, t) + \dots$
(izochronní $\delta t = 0$)
 $\delta f = \text{lineární část } [f(\vec{x} + \delta \vec{x}, t) - f(\vec{x}, t)] = \delta f$ $\delta^2 f$

Jsou-li všechny síly konzervativní

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad \text{pak}$$

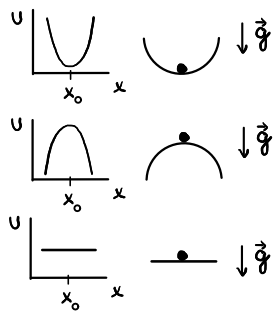
$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \cdot \delta \vec{x} = -\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i = -\delta U$$

a rovnovážné polohy \vec{x}_0 jsou stacionární body $\delta U(\vec{x}_0) = 0$ potenciální energie.

Typ polohy

$U(\vec{x}_0)$

např.



b) vázaných – podrobených holonomním skleronomním vazbám $f_k(\vec{x}) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$

$$(LR1D) \quad 0 = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) + \vec{R}(\vec{x}_0, 0) = \vec{F} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k \Leftrightarrow 0 = (\vec{F} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k) \cdot \delta \vec{x} \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

vtištěné síly (akční)

vazbové síly (reakční)

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

Rozložíme posunutí a síly do směru tečného a normálového ke konf. pr. M v bodě \vec{x}_0 .
 $\delta \vec{x} = \delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N$ $\vec{F} = \vec{F}^T + \vec{F}^N$

$$\Leftrightarrow 0 = (\vec{F}^T + \vec{F}^N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k) \cdot (\delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N) = \underbrace{(\vec{F}^T + \vec{F}^N)}_{\vec{F}} \cdot \delta \vec{x}^T + \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\nabla f_k \cdot \delta \vec{x}^T}_{=0} + \underbrace{\vec{F}^T \cdot \delta \vec{x}^N}_{=0} + \underbrace{(\vec{F}^N + \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla f_k)}_{=0} \cdot \delta \vec{x}^N = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x}^T \quad \forall \delta \vec{x}^T \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$$

zvolíme $-\lambda_k$ jako složky \vec{F}^N v bázi $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ normálového prostoru k M v bodě \vec{x}_0 .
 $\delta \vec{x}^T \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n}$

Princip virtuální práce

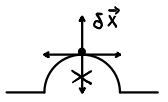
$$\delta A(\vec{x}_0) = \vec{F}(\vec{x}_0, 0) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \widehat{n} \quad \delta \vec{x} \cdot \nabla f_k(\vec{x}_0) = 0$$

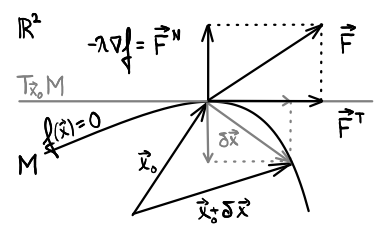
Soustava částic je v rovnovážné konfiguraci $\vec{x}_0 \in M \subset \mathbb{R}^{3N} \Leftrightarrow$
virtuální práce vtištěných sil je rovna nule $\delta A(\vec{x}_0) = 0 \Leftrightarrow$
práce vtištěných sil při virtuálních posunutích ve shodě s vazbami je nulová.

Pozn. uvažovali jsme pouze udržující vazby a jim odpovídající vratná posunutí ($\forall \delta \vec{x} \exists -\delta \vec{x}$)

pro neudržující vazby a nevratná posunutí je třeba princip modifikovat $\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} \leq 0$



Posunutí ve shodě s vazbou $f(\vec{x})=0$ $f(\vec{x}_0+\delta\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{x}}}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \delta\vec{x} + \underbrace{O(|\delta\vec{x}|^2)}_{=0}$



Virtuální posunutí – myšlené okamžité infinitezimální posunutí ve shodě s vazbou

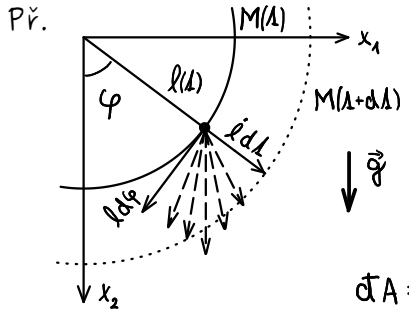
Jsou-li všechny vtíštěné síly konzervativní $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$ pak $0 = \delta A = (-\nabla U + \lambda \nabla f_k) \cdot \delta \vec{x} = -\delta(U - \lambda f_k) = -\delta \tilde{U}$ a úloha se redukuje na hledání vázaného extrému funkce $U(\vec{x})$ vzhledem k varietě M

t. j. $\delta \tilde{U}(\vec{x}_0) = 0$ $f_k(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall k \in \hat{K}$ $\frac{\delta^2 \tilde{U}(\vec{x}_0)}{|\mathbb{T}_{\vec{x}_0} M} \begin{cases} > 0 & \text{stabilní} \\ = 0 & \text{labilní} \\ < 0 & \text{indiferentní} \end{cases}$

potenciální energie vazebných sil

Infinitezimální posunutí holonomní soustavy s rheonomními vazbami $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{K}$ $\vec{x} = \vec{x}(\vec{q}, t)$

- možné (reálné) $0 = d f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt$ $dx_i = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} dt$ $f(\vec{x}+d\vec{x}, t+dt) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \dots$
- virtuální $0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i$ $\delta x_i = \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ $f(\vec{x}+\delta\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} + \dots$
- skutečné $0 = d \tilde{f}_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{\tilde{x}}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} \right) dt$ $d \tilde{x}_i = \left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_j} \dot{\tilde{q}}_j + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} \right) dt$ lze získat z možného posunutí dosažením trajektorie $x_i = \tilde{x}_i(t), q_j = \tilde{q}_j(t)$



Př. $f(x_1, x_2, l) = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$
 $x_1 = l \sin \varphi$ $x_2 = l \cos \varphi$ $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

Virtuální posunutí a virtuální práce
 $0 = \delta f = 2x_1 \delta x_1 + 2x_2 \delta x_2$ $\delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} l \delta \varphi$
 $\delta A = (\vec{F} + \lambda \nabla f) \cdot \delta \vec{x} = \vec{F} \cdot \delta \vec{x} + \lambda \nabla f \cdot \delta \vec{x} = 0 \delta x_1 + (mg) \delta x_2$
 $\delta \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} l d\varphi + \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{l} dt$
 virtuální práce vazebných sil
 skutečná práce

Možné posunutí a práce
 $0 = d f = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 - 2l \dot{l} dt$
 $dA = (\vec{F} + \lambda \nabla f) \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot d\vec{x} + \lambda \nabla f \cdot d\vec{x} = 0 dx_1 + mg dx_2 + 2\lambda x_1 dx_1 + 2\lambda x_2 dx_2 = mg dx_2 + 2\lambda \dot{l} dt$

Př. pro $l = \text{konst.}$ $0 = \delta A = mg \delta x_2 = -mg \sin \varphi \delta \varphi \Rightarrow \varphi = 0, \pi$ je rovnovážná poloha

výkon vazebné síly = $-\lambda \frac{\partial f}{\partial t}$

2) d'Alembertův princip – dynamická rovnováha soustavy částic podrobených vazbám $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{K}$

(LR1D) $M \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \vec{R}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla f_k$
 $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_{3N})$ $f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{K}$

Zavedení setrvačné síly $\vec{I} = -M \ddot{\vec{x}}$ umožňuje zobecnit princip virtuální práce ze statiky.

$\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla f_k - M \ddot{\vec{x}} = 0$ ← podmínka rovnováhy sil
 vtíštěné síly (akční) vazbové síly (reakční) setrvačné síly

Rovnici opět přenásobíme $\delta \vec{x} = \delta \vec{x}^T + \delta \vec{x}^N$ kde $\delta \vec{x}^T \cdot \nabla f_k = 0 \quad \forall k \in \hat{K}$ $\delta \vec{x}^N \in \text{span}_{\mathbb{R}}(\nabla f_1, \dots, \nabla f_N)$

$(\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}^T + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla f_k \cdot \delta \vec{x}^T + (\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}^N + \left[(\vec{F} - M \ddot{\vec{x}})^N + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla f_k \right] \cdot \delta \vec{x}^N = 0$
 efektivní síly $\delta A_{\text{eff}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = (\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x}$

d'Alembertův princip (1743)

$$\delta A_{\text{eff}} = (\vec{F} - M \ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$f_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall k \in \hat{K} \quad \delta \vec{x} \cdot \nabla f_k = 0$$

Pohyb mechanické soustavy se děje v dynamické rovnováze efektivních sil t. j. tak, že virtuální práce efektivních sil je v každém okamžiku rovna nule $\delta A_{\text{eff}}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t), t) = 0$.

Pozn: výhoda – není třeba pracovat se silami ideálních holonomních vazeb např. držících pohromadě tuhé těleso složené z N hm. bodů: posunutí jsou pouze translace a rotace $\vec{x}_\omega = \vec{r} + \vec{r}_\omega$ $|\vec{r}_\omega| = \text{konst.}$ $\delta \vec{x}_\omega = \delta \vec{r} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_\omega$ jsou nezávislé

$\delta A_{\text{eff}} = \sum_{\omega=1}^N (\vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega) \cdot \delta \vec{x}_\omega = \sum_{\omega=1}^N (\vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega) \cdot (\delta \vec{r} + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_\omega) = \left[\sum_{\omega=1}^N \vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega \right] \cdot \delta \vec{r} + \left[\sum_{\omega=1}^N \vec{r}_\omega \times (\vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega) \right] \cdot \delta \vec{\varphi} = 0$
 $0 = \sum_{\omega=1}^N \vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega = \vec{F} - \vec{P}$ $0 = \sum_{\omega=1}^N \vec{x}_\omega \times (\vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega) - \vec{r} \times \left(\sum_{\omega=1}^N \vec{F}_\omega - m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega \right) = \sum_{\omega=1}^N \vec{x}_\omega \times \vec{F}_\omega - \left(\sum_{\omega=1}^N \vec{x}_\omega \times m_\omega \ddot{\vec{x}}_\omega \right) = \vec{N} - \vec{L}$

Pohybové rovnice (LR1D) pro neholonomní soustavu s vazbami lineárně závislými na rychlostech

vazby: r -holonomních (nezávislých)

p -neholonomních (nezávislých)

$$f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \lambda(\nabla f_1, \dots, \nabla f_p) = \pi \quad \sum_{i=1}^{3N} a_{li}(\vec{x}, \lambda) \dot{x}_i + b_l(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall l \in \hat{p} \quad A = (a_{li}) \text{ matice typu } p \times 3N$$

$$0 = \delta f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i = \nabla f_k \cdot \delta \vec{x} \quad \text{L.N. } \forall \vec{x} \in M(\lambda) \quad A(\vec{x}, \lambda) \dot{\vec{x}} + \vec{b}(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad / \cdot d\lambda \quad \lambda(A(\vec{x}, \lambda)) = \pi \quad \forall \vec{x} \in M(\lambda) \quad \forall \lambda$$

d'Alembertův princip

$$\delta A_{\text{d}} = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i = (\vec{F} - M\ddot{\vec{x}}) \cdot \delta \vec{x} = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \\ A(\vec{x}, \lambda) \dot{\vec{x}} + \vec{b}(\vec{x}, \lambda) = 0 \end{aligned} \right\} (3) \quad \left. \begin{aligned} \forall \delta \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \quad \nabla f_k \cdot \delta \vec{x} = 0 \\ A \delta \vec{x} = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

$\forall \delta \vec{x} \in T_{\vec{x}} M(\lambda) \cap \text{Ker } A(\vec{x}, \lambda) = \text{Ker } B(\vec{x}, \lambda)$
 $B(\vec{x}, \lambda)$ matice $(\pi+p) \times 3N$ hodnosti $\pi+p$
 $\Delta = 3N - \pi$
 BÚNO: regulární matice typu $(\pi+p) \times (\pi+p)$

Metoda Lagrangeových multiplikátorů:

Místo vyjádření závislých posunutí složek

δx_j pomocí $\Delta-p$ nezávislých z podmínek (2)

a jejich dosazení do rovnice (1) přenásobíme

rovnice (2) Lagrangeovými multiplikátory λ_j, μ_j

a přičteme k rovnici (1) a nastavíme λ_j, μ_j

tak abychom vynulovali koeficienty u závislých δx_j

nastavíme tak aby

$$\left(\begin{matrix} \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{p+1}} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{3N}} \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,3N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p+1} & \dots & a_{p,3N} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_{p+1} \\ \delta x_{p+1} \\ \vdots \\ \delta x_{3N} \end{matrix} \right) = 0$$

nezávislé = 0, závislé

$\left(-F_1^d, \dots, -F_{p+1}^d, \dots, -F_{3N}^d \right)$

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i = \sum_{i=1}^{\Delta-p} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i + \sum_{i=p+1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li}) \delta x_i$$

$\delta x_1, \dots, \delta x_{3N}$ nejsou nezávislé $0'' \Leftarrow \delta x_1, \dots, \delta x_{p+1}$ jsou nezávislé $0''$ vynulujeme volbou λ_k a μ_l

Pohybové rovnice: $m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li} \quad \forall i \in \hat{N} \quad f_k(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall k \in \hat{r} \quad \sum_{i=1}^{3N} a_{li}(\vec{x}, \lambda) \dot{x}_i + b_l(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad \forall l \in \hat{p}$

Věta o energii:

$$m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i = F_i \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_{l=1}^p \mu_l a_{li} \dot{x}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} T = \vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} - \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \lambda} - \sum_{l=1}^p \mu_l b_l \Rightarrow \frac{d}{dt} (T+U) = - \sum_{k=1}^p \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \lambda} - \sum_{l=1}^p \mu_l b_l$$

pro konzervativní síly $F_i \dot{x}_i = - \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \frac{dU(\vec{x})}{dt}$

Odvození LR2D pro holonomní soustavu:

$$x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, \lambda) \quad \delta x_i = \delta \hat{x}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$0 = \delta A_{\text{d}} = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{\Delta} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial t \partial q_j} + \frac{\partial^2 \hat{x}_i}{\partial x_i \partial q_j} \dot{x}_i \right) \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{\Delta} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \forall j \in \hat{\Delta} \quad \Delta = 3N - \pi$$

$$Q_j = Q_j^{(nep)} + Q_j^{(pot)} = Q_j^{(nep)} + \left[- \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} = Q_j^{(nep)} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) =$$

$$= Q_j^{(nep)} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \right) = Q_j^{(nep)} - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Pozn: Záměnnost variace a derivace $\frac{d}{dt} (\delta \vec{x}) = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}} - \ddot{\vec{x}}) = \dot{\vec{x}} - \ddot{\vec{x}} = \delta \dot{\vec{x}} = \delta \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)$ platí i pro funkce $\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{d}{dt} f$ předpokládáme, že variace x je diferencovatelnou funkcí času, případně formálně definujeme jak působí operátor časové derivace

Jourdainův princip

$$0 = \frac{d}{dt} \delta A_{\text{d}} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i \quad \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i = 0 \quad \delta \dot{\lambda} = 0 \quad \delta \dot{x}_i = 0$$

zvolíme "0"

Gaussův princip

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} \frac{d}{dt} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \ddot{x}_i \quad \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \ddot{x}_i = 0 \quad \delta \ddot{\lambda} = 0 \quad \delta \ddot{x}_i = 0$$

zvolíme "0"

Ústřední rovnice Lagrangeova - jiný tvar d'Alembertova principu

$$0 = \delta A_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i}_{\delta A \text{ virtuální práce akčních sil}} - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \delta A - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \delta x_i \right) + \delta \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \delta A - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) + \delta T$$

$$\ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \delta x_i) - \frac{1}{2} \delta \dot{x}_i^2$$

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right)$$

v obecných souřadnicích: $x_i = \hat{x}_i(\vec{q}, t)$ $\delta x_i = \delta \hat{x}_i = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ $\hat{T}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\vec{x}(\vec{q}, t), \dot{\vec{x}}(\vec{q}, t), t)$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \quad \delta A = F_i \delta x_i = F_i \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j \delta q_j = \delta \hat{A}$$

$$\delta \hat{T} + \delta \hat{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

$$\delta \hat{A} = Q_j^{(nep)} \delta q_j + Q_j^{(pot)} \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \right) \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial \hat{U}}{\partial q_j} \delta q_j = Q_j^{(nep)} \delta q_j + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \delta \hat{U}$$

$$\delta \hat{T} - \delta \hat{U} + Q_j^{(nep)} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\hat{T} - \hat{U})}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

$$\delta \hat{L} + Q_j^{(nep)} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right)$$

Pozn: diferenciální počet

<p>Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = A(x) \Delta x + \omega(x, \Delta x) \cdot \Delta x$ $\omega(x, \Delta x) \rightarrow 0$ pro $\Delta x \rightarrow 0$</p> <p>$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\Delta f = f(\vec{x} + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n A_j(\vec{x}) \Delta x_j + \omega(\vec{x}, \Delta \vec{x}) \cdot \Delta \vec{x}$ $\omega(\vec{x}, \Delta \vec{x}) \rightarrow 0$ pro $\Delta \vec{x} \rightarrow 0$</p>	<p>$df = A(x) \Delta x = f'(x) dx$ $f(x) = x \quad dx = \Delta x$</p> <p>$df = A(\vec{x}) \Delta \vec{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} dx_j$ $\nabla f(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ pokud existuje, pak $df = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \Big _{\varepsilon=0} f(\vec{x} + \varepsilon d\vec{x})$</p>	<p>derivace $f'(x) = \frac{df}{dx} = A(x)$</p> <p>$f(\vec{x}) = A(\vec{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $A_j(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \partial_j f = f_j$</p>	<p>stacionární bod $f'(x_0) = 0$</p> <p>$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j \in \hat{m}$</p>
---	--	---	--

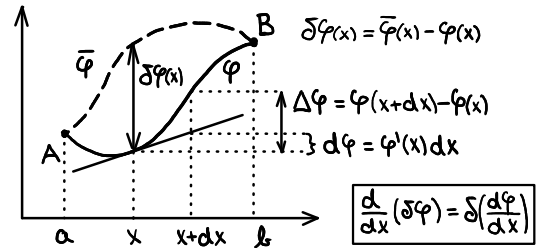
Variační počet body \rightarrow křivky funkce \rightarrow funkcionály

Křivka (třídy $\pi \in \mathbb{N}_0$) je spojitě zobrazení $\varphi: \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (třídy C^π tj. má spojitě derivace do řádu π).

$C^\pi \langle a, b \rangle$ mn. všech křivek třídy π tvoří vektorový prostor dim $+\infty$ s normou $\|\varphi\| = \max_{x \in \langle a, b \rangle} \{ |\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, \dots, |\varphi^{(\pi)}(x)| \}$ který označíme $\tilde{C}^\pi \langle a, b \rangle$

$C_{(A,B)}^\pi \langle a, b \rangle = \{ \varphi \in C^\pi \langle a, b \rangle \mid \varphi(a) = A \wedge \varphi(b) = B \}$ mn. křivek z A do B

$(C_{(A,B)}^\pi \langle a, b \rangle, -, \tilde{C}_{(0,0)}^\pi \langle a, b \rangle)$ normovaný afinní prostor



Bud' $\varphi \in C_{(A,B)}^\pi \langle a, b \rangle$ pak pro lib. $\bar{\varphi} \in C_{(A,B)}^\pi \langle a, b \rangle$ nazýváme $\delta \varphi = \bar{\varphi} - \varphi \in \tilde{C}_{(0,0)}^\pi \langle a, b \rangle$ variací křivky φ s pevnými konci. $C^\pi \langle a, b \rangle$ s volnými konci.

Funkcionál je zobrazení z prostoru (např. vektorového) do reálných čísel.

Funkcionál $I: C^\pi \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitý na křivce φ , pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{\varphi} \in \tilde{C}^\pi \langle a, b \rangle \|\bar{\varphi} - \varphi\| < \delta \Rightarrow |I(\bar{\varphi}) - I(\varphi)| < \varepsilon$

Funkcionál $I: C^\pi \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelný na křivce φ pokud existuje spojitý lineární funkcionál $\Phi: \tilde{C}^\pi \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (nazývaný variace I na křivce φ značený $\delta I(\varphi)$) tak, že platí $\lim_{\|\delta \varphi\| \rightarrow 0} \frac{I(\varphi + \delta \varphi) - I(\varphi) - \Phi[\delta \varphi]}{\|\delta \varphi\|} = 0$.

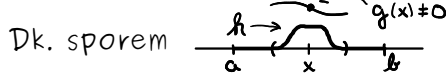
tj. $\Delta I = I(\varphi + \delta \varphi) - I(\varphi) = \underbrace{\Phi[\delta \varphi]}_{\text{lineární část přírůstku } \delta I(\varphi)[\delta \varphi]} + \underbrace{\omega(\varphi, \delta \varphi)}_{\downarrow \text{pro } \|\delta \varphi\| \rightarrow 0} \cdot \|\delta \varphi\|$

Pozn: existuje-li variace, lze ji najít takto $\eta \in \tilde{C}^\pi \langle a, b \rangle \quad \hat{I}(\varepsilon) = I(\varphi + \varepsilon \eta) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \delta I(\varphi)[\delta \varphi] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} I(\varphi + \varepsilon \delta \varphi)$

$$\frac{d\hat{I}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I(\varphi + \varepsilon \eta) - I(\varphi)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\Phi[\varepsilon \eta] + \omega(\varphi, \varepsilon \eta) \cdot \|\varepsilon \eta\|) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Phi[\eta] + \omega(\varphi, \eta) \cdot \|\eta\|) = \Phi(\eta) = \delta I(\varphi)[\eta]$$

Funkcionál $I: C^\pi \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má na křivce φ - stacionární hodnotu (φ je extrémalou I) pokud $\delta I(\varphi) = 0$
 - maximum (minimum) pokud $\exists \delta > 0 \forall \bar{\varphi} \in \tilde{C}^\pi \langle a, b \rangle \|\bar{\varphi} - \varphi\| < \delta \Rightarrow I(\varphi) \geq I(\bar{\varphi})$ ($I(\varphi) \leq I(\bar{\varphi})$)

Základní lemma variačního počtu: Bud' $g \in C\langle a, b \rangle$ pokud $\forall h \in C_{10,0}^n\langle a, b \rangle$ platí $\int_a^b g(x)h(x) dx = 0$ pak $g(x) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.



Dále speciální případ funkcionálu:

Bud' $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^2 pak funkcionál $J: C^1\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $J(\varphi) := \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) dx$ je diferencovatelný na $C^1\langle a, b \rangle$.

$$\delta J(\varphi)[\delta\varphi] = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(\varphi + \varepsilon \delta\varphi) = \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(x, \varphi + \varepsilon \delta\varphi, \varphi' + \varepsilon \delta\varphi') dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi}(x, \varphi, \varphi') \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi'}(x, \varphi, \varphi') \delta\varphi' dx =$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) \delta\varphi dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) \right] \delta\varphi dx + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \right]_a^b$$

Křivka $\varphi \in C_{(A,B)}^1\langle a, b \rangle$ je extrémálou funkcionálu $J|_{C_{(A,B)}^1\langle a, b \rangle} \Leftrightarrow \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \right) \right] = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

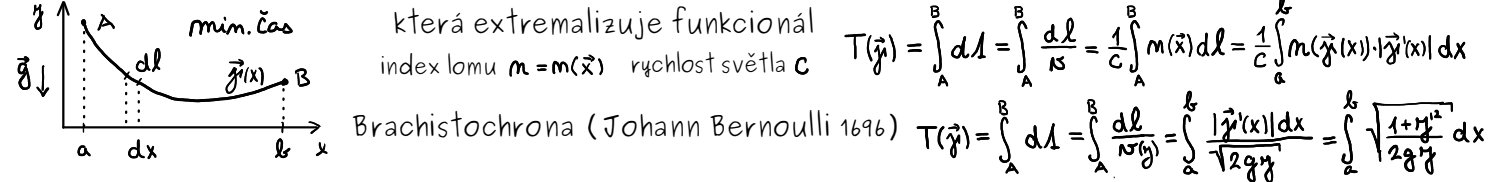
Zobecnění: Eulerova rovnice pro funkcionál $J \quad \varphi(a) = A$
 $\tilde{\varphi}: \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1 \quad \tilde{\varphi}(a) = \vec{A} \quad \tilde{\varphi}(b) = \vec{B}$
 ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami $\varphi(b) = B$

$F: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} \in C^2 \quad J(\tilde{\varphi}) = \int_a^b F(x, \tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}'(x)) dx \quad \delta J(\tilde{\varphi}) = 0 \wedge \delta \tilde{\varphi}(a) = 0 = \delta \tilde{\varphi}(b) \Leftrightarrow \forall i \in \hat{n} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_i'} \right) = 0 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$

Je-li $\tilde{\varphi}$ minimála (maximála) funkcionálu $J|_{C_{(A,B)}^1\langle a, b \rangle}$ pak $\delta^2 J(\tilde{\varphi}) \geq 0$ (≤ 0) a matice $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i' \partial \varphi_j'} \right)$ je PSD (NSD)

- **Integrální principy** – jsou globální, vyšetřují trajektorii v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ jako celek – jdou zobecnit na nemechanické úlohy (elmag. pole, kvantová mechanika)

Fermatův princip (1662) – světlo se z bodu A do bodu B šíří po "časově" nejkratší dráze tj. po dráze která extremalizuje funkcionál index lomu $n = n(\vec{x})$ rychlost světla c



Maupertuis (1744) hypotéza: Každý děj v přírodě probíhá tak, že určitá veličina (tzv. akce) je minimální.

Princip nejmenší akce	– Lagrange (1760) pro konzervativní soustavy	$E = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + U(\vec{q}) \quad S_0 = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} 2T d\ell$
	– Hamilton (1834) pro nekonzervativní soustavy	$\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{q}) \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(t) \quad T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad U(\vec{q}, t) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} T - U dt$

Z ústřední rce. Lagrangeovy odvodíme Hamiltonův princip budeme předpokládat, že virtuální posunutí jsou diferencovatelné funkce času $\delta \vec{q} = \delta \vec{q}(t) \in C_{(a_0,1)}^1\langle t_1, t_2 \rangle$ tvoří

tedy variace křivky $\vec{q}(t) \in C^1\langle t_1, t_2 \rangle$ s pevnými konci $\delta \vec{q}(t_1) = 0 = \delta \vec{q}(t_2)$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \hat{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_{\delta}^{(nep)} \delta q_{\delta} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta \hat{L} + Q_{\delta}^{(nep)} \delta q_{\delta}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_{\delta}} \delta q_{\delta} \right) dt = \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_{\delta}} \delta q_{\delta} \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Hamiltonův princip: Pohyb holonomní soustavy s potenciálními silami v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ se děje po křivce $\vec{q}(t)$ (trajektorii) na které akce nabývá stacionární hodnoty vzhledem k (izochronním $\delta t = 0$) variacím s pevnými konci $\delta \vec{q}(t_1) = 0 = \delta \vec{q}(t_2)$.

$$\delta S[\vec{q}(t)] = 0 \wedge \delta \vec{q}(t) \Big|_{t_1, t_2} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)} = 0 \quad \forall i \in \hat{n}$$

Eulerovy-Lagrangeovy rce. pro funkcionál S O.D.R. 2. řádu pro $\vec{q}(t) = ?$ s okrajovými podmínkami $\vec{q}(t_1) = \vec{Q}_1 \quad \vec{q}(t_2) = \vec{Q}_2$

- Akce je funkcionál $S: C_{(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}^1\langle t_1, t_2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a neboť $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)$ je PD, je trajektorie zpravidla její minimála.
- Hamiltonův princip nezávisí na volbě obecných souřadnic \Rightarrow LR2D mají stejný tvar ve všech obecných s.
- Nejednoznačnost Lagrangianu $L' = L + \frac{d}{dt} h(\vec{q}, t) \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + [h(\vec{q}(t_2), t_2) - h(\vec{q}(t_1), t_1)] = S + K \Rightarrow \delta S' = \delta S$
- Lze zobecnit mimo mechaniku – potřeba najít příslušnou Lagrangeovu funkci (pomocí principů symetrie)

Routhova funkce - vyloučení cyklické souřadnice Q $[L, \Delta+1, \vec{q}, Q] \rightarrow [R, \Delta, \vec{q}]$

necht' $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, \Delta)$ $\frac{\partial L}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}, \Delta) = konst$ (rovnice pro Q) $\Rightarrow \dot{Q} = \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)$

do zbylých Δ rovnic $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{\Delta}$ dosadíme za \dot{Q} a Q tyto rovnice pro neznámé $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}$ lze získat

z Routhovy funkce $R(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta) = \hat{L} - P\dot{Q} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta), \Delta) - P\dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)$ (někdy $R = P\dot{Q} - \hat{L}$)

kteřá převezme roli Lagrangeovy funkce pro nový systém o Δ stupních volnosti

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial Q} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial Q} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} - P \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q_i} \right) = \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right]_{\dot{Q} = \dot{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, P, \Delta)}$$

Jacobiho princip - pro konzervativní soustavy (skleronomní holonomní vazby a konzervativní síly)

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\vec{q}) \quad T \text{ je P.D. kvadratická forma v } \dot{\vec{q}} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = T + U = konst$$

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\vec{q}(\lambda), \dot{\vec{q}}(\lambda)) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\vec{q}(\lambda), \dot{\vec{q}}(\lambda)) d\lambda \quad \text{substituace: změna parametrizace}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = \lambda(\tau) \\ d\lambda = \lambda' d\tau \end{array} \right\} \vec{q}(\tau) = \vec{q}(\lambda(\tau)) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{q}' = \frac{d\vec{q}}{d\tau} = \dot{\vec{q}} \lambda' \end{array} \right\} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\vec{q}, \vec{q}') \lambda' d\tau$$

"nový" variační princip pro $\Delta+1$ křivek $\vec{q}(\tau), \lambda(\tau)$ s funkcí $\hat{L}(\vec{q}, \vec{q}', \lambda) = L(\vec{q}, \vec{q}') \lambda'$ kde čas λ

$$h_\lambda = \frac{\partial(L\lambda')}{\partial \lambda'} = \frac{\partial L}{\partial \lambda'} \lambda' + L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\dot{q}_k}{\lambda'^2} \right) \lambda' + L = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + L = -h_k \dot{q}_k + L = -E$$

je cyklickou souřadnicí, kterou vyloučíme pomocí Routhovy funkce

$$R = L\lambda' - h_\lambda \lambda' = (L - h_\lambda) \lambda' = (L + h_k \dot{q}_k - L) \lambda' = h_k \dot{q}_k \lambda' = (L + E)\lambda' = (T - U + T + U)\lambda' = 2T\lambda'$$

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} h_k \dot{q}_k \lambda' d\tau = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} h_k dq_k = \int_{\tau_1}^{\tau_2} 2T\lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2T} \sqrt{2T} \lambda' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j} \lambda' d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \lambda' \dot{q}_j \lambda'} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{2(E-U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}}_{F(\vec{q}, \vec{q}')} d\tau = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) dq_i dq_j}$$

element délky $d\ell^T$ v konf. pr. s metrickým tenzorem $T_{ij}(\vec{q})$

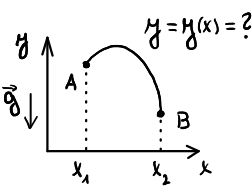
Jacobiho princip: Konzervativní soustava se mezi konfiguracemi \vec{q}_1, \vec{q}_2 pohybuje po křivce na které

zkrácená akce $S_0[\vec{q}(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))} \sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j} d\tau = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}_2} \sqrt{2(E-U(\vec{q}))} d\ell^T$ nabývá stacionární hodnoty vzhledem k variacím s pevnými konci $\delta \vec{q}(\tau_{1,2}) = 0$.

Pozn. z Eulerových rovnic $\frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad \forall j \in \hat{\Delta} \Rightarrow \vec{q} = \vec{q}(\tau)$ získáme pouze tvar trajektorie (τ není čas)

časovou parametrizaci trajektorie lze získat pomocí integrálu pohybu $E = T + U \Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2T}{2(E-U)}}$ $\lambda = \int_0^1 d\lambda = \int_0^1 \frac{\sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}}{\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}} d\lambda = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\sqrt{T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j}}{\sqrt{2(E-U(\vec{q}))}} d\tau$

Př. tvar trajektorie šikmého vrhu $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$ $U = mgy$ $T = \frac{1}{2} (\dot{x}, \dot{y}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ $E = T + U = konst$



$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2(E-mgy)} \sqrt{m(dx)^2 + m(dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2(E-mgy)} \sqrt{m(1+y'^2)} dx = \sqrt{2g} m \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{E}{mg} - y} \sqrt{1+y'^2} dx$$

parametrizace $y = y(x) \quad dy = y' dx$ (tj. $\tau = x$)

Eulerova rce. $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ protože $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ přejde na

$$C_1 = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \quad k = \frac{E}{mg}$$

$$C_1 = \sqrt{k-y} \sqrt{1+y'^2} - y' \sqrt{k-y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{k-y}}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{C_1} \sqrt{k-y-C_1^2} \Rightarrow \int \frac{1}{C_1} dx = \int \frac{y' dx}{\sqrt{k-y-C_1^2}} \Rightarrow \frac{x}{C_1} = -2\sqrt{k-y-C_1^2} + \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow (x-C_2)^2 = 4C_1^2 \left(\frac{E}{mg} - C_1^2 - y \right)$$

Řešitelné modely mechaniky

Pokud síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na rychlostech, pak z omezení daných Galileiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

1) Problém dvou těles - izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje

3. Newtonův zákon můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \text{Integrály pohybu}$$

$$\vec{P} = (m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2) = M \dot{\vec{R}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \quad M = m_1 + m_2$$

symetrie $\vec{x}_i' = \vec{x}_i + \epsilon \vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2$

Teorém $i=1,2$

Noetherové $\vec{x}_i' = \mathcal{S}(\epsilon) \vec{x}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{x}_1 \times m_1 \dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2 \times m_2 \dot{\vec{x}}_2$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{konst} / \int d\lambda \Rightarrow \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} \lambda + \vec{R}_0$$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 - \vec{P} \lambda)$$

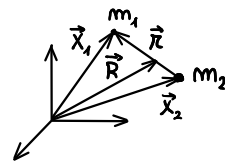
Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

$$\vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{M}$$



rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

$$\hat{L}(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}\right)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \quad \text{Pohybové rovnice}$$

redukovaná hmotnost μ

$$M \dot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R} \quad \vec{P} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}}$

Konstanta (lze vypustit)

Routhova funkce $\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru \vec{L} pak $\theta = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta} = 0$

$$\vec{r}' = \mathcal{S}(\epsilon) \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \text{konst}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = r_i L_i = 0$$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k \vec{L}

Cyklická souřadnice $\varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow h_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = L_3 = l = \text{konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \quad \varphi(\lambda) = \int \frac{l}{\mu r^2} d\lambda + \varphi_0$

Routhova funkce

Efektivní potenciál

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi} h_\varphi = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4}) - U(r) - \frac{l^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U_{\text{eff}}(r) \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 - U(q)$$

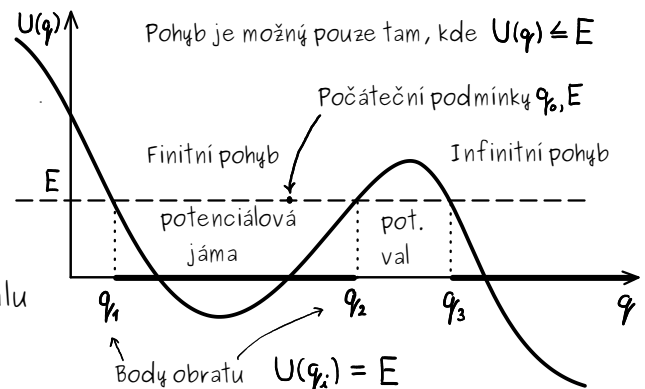
Integrál pohybu $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 + U(q) = \text{konst}$

$$\dot{q}^2 = \frac{2(E - U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E - U(q))}} \dot{q} \quad / \int d\lambda$$

$$\pm \lambda = \int \sqrt{\frac{T(q)}{2(E - U(q))}} dq + \lambda_0 \quad \text{řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách}$$



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0, \vec{L} \leftrightarrow (\theta, \dot{\theta}, l), \varphi_0, E, \lambda_0$

Řešitelné modely mechaniky

1) Problém dvou těles - izolovaná soustava dvou hmotných bodů

Budeme-li předpokládat, že síly kterými na sebe tyto body působí nezávisí na jejich rychlostech, pak z omezení daných Galileiho principem relativity plyne, že tyto síly jsou konzervativní.

Galileiho princip relativity - vyžaduje invarianci pohybových rovnic vzhledem k grupě Galileiho transformací.

Galileiho transformace $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$ $\vec{v}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ $\mathcal{S} \in SO(3)$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda - \Lambda_0$$

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} + \Lambda_0$$

$$\vec{x} = \mathcal{S}^T (\vec{x} - \vec{v}\Lambda - \vec{x}_0)$$

$$\vec{x} = \mathcal{S} \vec{x} + \vec{v}\Lambda + \vec{x}_0$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\Lambda} = \frac{d}{d\Lambda} (\mathcal{S} \vec{x} + \vec{v}\Lambda + \vec{x}_0) = \mathcal{S} \frac{d\vec{x}}{d\Lambda} + \vec{v} = \mathcal{S} \frac{d\vec{x}}{d\tilde{\Lambda}} \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\Lambda} + \vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\Lambda^2} = \mathcal{S} \frac{d^2\vec{x}}{d\tilde{\Lambda}^2}$$

Pohybové rovnice

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad \rightarrow \quad m_\alpha \mathcal{S} \ddot{\vec{x}}_\alpha = \mathcal{S} \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \tilde{\Lambda}) \quad / \cdot \mathcal{S}^T$$

$$m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \tilde{\Lambda}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \tilde{\Lambda}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}^T \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathcal{S}^T(\vec{x}_\alpha - \vec{v}\Lambda - \vec{x}_0), \mathcal{S}^T(\vec{x}_\beta - \vec{v}\Lambda - \vec{x}_0), \Lambda - \Lambda_0)$$

Invariance - rovnice se při transformaci nemá měnit (pouze přibudou vlnky u proměnných)

Symetrie vůči Galileiho transformaci $\forall \mathcal{S} \in SO(3) \quad \forall \vec{v}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \Lambda_0 \in \mathbb{R}$

Protože síly nezávisí na rychlostech stačí vzít $\vec{v} = 0$

a) Translace v čase

$$\mathcal{S} = \mathbb{1} \quad \vec{x}_0 = 0$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta, \Lambda + \Lambda_0) \quad \forall \Lambda_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta)$$

b) Translace v prostoru

$$\mathcal{S} = \mathbb{1}$$

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta$$

$$\vec{u} = \vec{x}_\alpha + \vec{x}_\beta$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0, \vec{x}_\beta - \vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \text{Přejdeme k novým souřadnicím}$$

$$\vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u}) = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u} - 2\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = \vec{G}(\vec{r}_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\alpha\beta} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$$

c) Rotace

$$\vec{x}_0 = 0$$

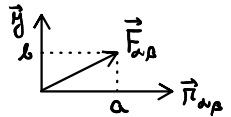
$$\mathcal{S}^T \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathcal{S}^T \vec{r}_{\alpha\beta}) \quad \forall \mathcal{S} \in SO(3) \quad |\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = |\mathcal{S} \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathcal{S}^T \vec{r}_{\alpha\beta})| = |\vec{F}_{\alpha\beta}(\mathcal{S}^T \vec{r}_{\alpha\beta})| \quad \forall \mathcal{S} \in SO(3)$$

velikost síly tedy nezávisí na směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ ale pouze na velikosti $r_{\alpha\beta}$ $|\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta})| = f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$

označme $\mathcal{S}(\varphi) \in SO(3)$ matici rotace o úhel φ kolem osy $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak $\mathcal{S}(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} = \mathcal{S}^T(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} \quad \forall \varphi$

rozložíme sílu $\vec{F}_{\alpha\beta}$ do směru $\vec{r}_{\alpha\beta}$ a směru kolmého na $\vec{r}_{\alpha\beta}$ pak

$$a \vec{r}_{\alpha\beta} + b \vec{y} = \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathcal{S}(\varphi) \vec{F}_{\alpha\beta}(\mathcal{S}^T(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta}) = \mathcal{S}(\varphi) \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a \mathcal{S}(\varphi) \vec{r}_{\alpha\beta} + b \mathcal{S}(\varphi) \vec{y} = a \vec{r}_{\alpha\beta} + b \mathcal{S}(\varphi) \vec{y}$$



$$b(1 - \mathcal{S}(\varphi)) \vec{y} = 0 \quad \forall \varphi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = a \vec{r}_{\alpha\beta} = \pm f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \frac{\vec{r}_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}} \quad \text{je izotropní (nezávisí na směru) a centrální (míří ve směru spojnice)}$$

Centrální izotropní síly $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$ jsou potenciální

$$(\vec{r} \cdot \nabla \vec{F}(\vec{r}))_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k(\vec{r})}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f(r) x_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_j} x_k + f(r) \delta_{jk} \right) = \varepsilon_{ijk} \left(f'(r) \frac{x_j}{r} x_k + f(r) \delta_{jk} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists U = U(r)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \text{grad} U(r) = - \frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = - \frac{\partial U(r)}{\partial x_i} = - U'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = - U'(r) \frac{x_i}{r} \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \mp \int f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$$

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = - \frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = - U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \cdot \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{r}_{\alpha\beta}} = - U'_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \cdot \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \vec{x}_\alpha} = - \frac{\partial U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{\partial \vec{x}_\alpha}$$

3. Newtonův zákon

$$\vec{F}_{\alpha\beta}(\vec{r}_{\alpha\beta}) = - \vec{F}_{\beta\alpha}(\vec{r}_{\beta\alpha}) \Rightarrow \int f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \int f_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha}) \Rightarrow U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = U_{\beta\alpha}(r_{\beta\alpha})$$

Pozn. Pro jednočásticový systém plyne z Galileovské invariance pohybových rovnic nulovost síly.

Pohybové rovnice musí být invariantní vůči Galileiho transformacím pouze pokud popisují izolovanou mechanickou soustavu.

Izolovanou soustavu dvou těles jejichž vzájemné silové působení nezávisí na rychlostech a splňuje 3. NZ můžeme popsat Lagrangeovou funkcí:

$$L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \text{Integrály pohybu}$$

$$\vec{P} = (m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2) = M \dot{\vec{R}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{L}} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \quad M = m_1 + m_2$$

symetrie $\vec{x}_i = \vec{x}_i + \epsilon \vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2$
Teorém $i=1,2$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = \text{konst} / \int dt \Rightarrow \vec{R} = \frac{\vec{P}}{M} t + \vec{R}_0$$

Noetherové $\vec{x}_i = S(\epsilon) \vec{x}_i \Rightarrow \vec{L} = \vec{x}_1 \times m_1 \dot{\vec{x}}_1 + \vec{x}_2 \times m_2 \dot{\vec{x}}_2$

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 - \vec{P} t)$$

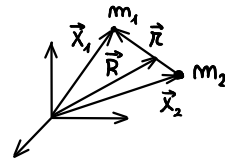
Přejdeme k souřadnicím $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{r}$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{x}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{M}$$

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

$$\vec{x}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{M}$$



rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu

Celkem 10 nezávislých integrálů pohybu

$$\hat{L}(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 - U(|\vec{r}|) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \quad \text{Pohybové rovnice}$$

redukovaná hmotnost μ

$$M \ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Cyklické souřadnice $\vec{R} \quad \vec{P} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = M \dot{\vec{R}}$

Konstanta (lze vypustit)

Routhova funkce $\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) - \frac{\vec{P}^2}{M} = -\frac{1}{2} \frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$

2) Pohyb částice ve sféricky symetrickém potenciálovém poli

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|)$$

Integrály pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{L}} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + U(|\vec{r}|)$$

přejdeme k sférickým souřadnicím pro které osa z míří ve směru \vec{L} pak $\theta = \frac{\pi}{2} \quad \dot{\theta} = 0$

$$\vec{r}' = S(\epsilon) \vec{r} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \text{konst}$$

$\in SO(3)$

$$\Downarrow \vec{r} \cdot \vec{L} = r_i L_i = 0$$

pohyb probíhá v rovině jdoucí počátkem a kolmé k \vec{L}

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Cyklická souřadnice $\varphi \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow h_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = L_3 = l = \text{konst} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2} \quad \varphi(t) = \int \frac{l}{\mu r^2} dt + \varphi_0$

Routhova funkce

Efektivní potenciál

$$\tilde{L} = \hat{L} - \dot{\varphi} h_\varphi = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4}) - U(r) - \frac{l^2}{\mu r^2} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - U_{\text{eff}}(r) \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

3) Pohyb konzervativní soustavy s jedním stupněm volnosti

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 - U(q)$$

Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{L}} = 0 \Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2} T(q) \dot{q}^2 + U(q) = \text{konst}$$

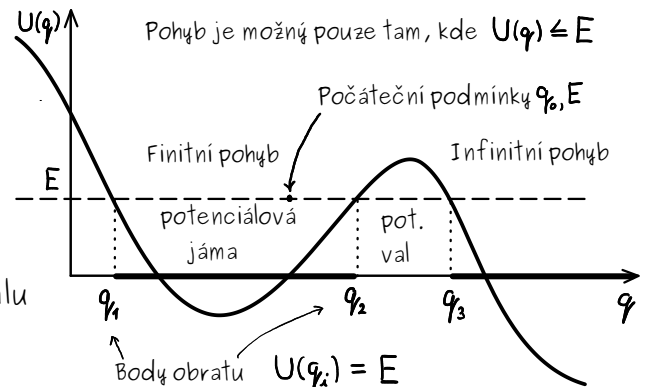
$$\dot{q}^2 = \frac{2(E - U(q))}{T(q)} \Rightarrow \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(q))}{T(q)}}$$

znaménko určuje směr pohybu

$$\pm 1 = \sqrt{\frac{T(q)}{2(E - U(q))}} \dot{q} \quad / \int dt$$

$$\pm t = \int \sqrt{\frac{T(q)}{2(E - U(q))}} dq + t_0$$

řešení zapsané pomocí integrálu tzv. řešení v kvadraturách



Pozn. řešení původního problému dvou těles závisí celkem na 12 integračních konstantách, které jsme použili v tomto pořadí $\vec{P}, \vec{R}_0, \vec{L} \leftrightarrow (\theta, \dot{\theta}, l), \varphi_0, E, t_0$

Hamiltonův formalismus (pro holonomní soustavy a potenciální síly v obecných souřadnicích)

Pozn: Kanonický tvar obyčejných diferenciálních rovnic $y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad \forall i \in \hat{n}$

LR2D
$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i \in \hat{n}$$

$\dot{q}_j = v_j \quad \forall j \in \hat{n}$

$v_k = (\mathbb{L}^{-1})_{ki} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} v_j \right] \quad \forall k \in \hat{n}$

$\dot{q} = v$

del $L = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \right| = \left| \frac{\partial^2 h_i}{\partial \dot{q}_j^2} \right| \neq 0$

Jinak

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{h}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \forall i \in \hat{n}$$

$$h_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) \rightarrow \dot{q}_i = \hat{q}_i(\vec{q}, \vec{h}, \lambda) \quad \forall i \in \hat{n}$$

$$\dot{h}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{(\vec{q}, \vec{h}(\vec{q}, \vec{h}, \lambda), \lambda)} \quad \forall i \in \hat{n}$$

Δ ODR 2. řádu
přechází na
 2Δ ODR 1. řádu

Přejdeme pomocí fce. L od nezávislých proměnných $(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) \xrightarrow{L} (\vec{q}, \vec{h}, \lambda)$ k novým nezávislým proměnným a najdeme funkci H, která zprostředkuje přechod zpět a pomocí ní zapíšeme rovnice.

Legendreova duální transformace $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f = f(x)$ (konvexní) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} h \quad \hat{h} = \frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ inverzní funkce

$h \xrightarrow{g} \pm x \quad \pm \hat{x} = \frac{dg}{dh}(h) = g'(h) \quad g(f'(x)) = \pm x$

$df = \frac{df}{dx} dx = \hat{h} dx$

$dg = \frac{dg}{dh} dh = \pm \hat{x} dh$

$f(x) = hx + g(h)$
 $[x, f(x)] \downarrow [h, g(h)]$

$d(f \pm g) = df \pm dg = h dx + x dh = d(hx) \Rightarrow f \pm g = hx + \text{konst.}$

$g(h) = \pm (h \hat{x}(h) - f(\hat{x}(h))) \quad \hat{f}(h) = f(\hat{x}(h))$

$f(x) = \hat{h}(x)x \mp \hat{g}(x) \quad \hat{g}(x) = g(\hat{h}(x))$

dualita $x \xleftrightarrow{f} h \xleftrightarrow{g} x$
transformace

Legendreova transformace Lagrangeovy funkce $\oplus \quad f \rightarrow L \quad x \rightarrow \vec{q} \quad \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q_i} \quad t \rightarrow \vec{t} \quad g \rightarrow H$

1) Obecná hybnost $\hat{h}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) \Rightarrow \dot{q}_i = \hat{q}_i(\vec{q}, \vec{h}, \lambda)$ lze pokud $\text{del} \left(\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \text{del} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \right) \neq 0$ hessián

2) Hamiltonova funkce $H(\vec{q}, \vec{h}, \lambda) = \sum_{i=1}^n h_i \hat{q}_i - \hat{L} = E(\vec{q}, \vec{h}(\vec{q}, \vec{h}, \lambda), \lambda)$ kde $\hat{L}(\vec{q}, \vec{h}, \lambda) = L(\vec{q}, \vec{q}(\vec{q}, \vec{h}, \lambda), \lambda)$
obecná energie v proměnných $(\vec{q}, \vec{h}, \lambda)$

3) Hamiltonovy kanonické rovnice (kanonický tvar LR2D)

I. sada $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial h_i}$ nemá dynamický obsah, je ekvivalentní definici obecné hybnosti

$\dot{q}_i = \hat{q}_i(\vec{q}, \vec{h}, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial h_i} \quad \hat{H}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = H(\vec{q}, \vec{h}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda), \lambda) = E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda)$

$\dot{h}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} (h_i \hat{q}_i - \hat{H}) = \frac{\partial h_i}{\partial q_i} \hat{q}_i - \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial h_i}{\partial q_i} \hat{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

II. sada $\dot{h}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ má dynamický obsah, nahrazuje Newtonovy rovnice

$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (h_i \hat{q}_i - \hat{L}) = h_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \lambda} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda}$

$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\vec{q} = \vec{q}(\vec{q}, \vec{h}, \lambda)}$

Př. Konzervativní soustava (konzervativní síly a skleronomní vazby): $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) = \frac{1}{2} T_{jk}(\vec{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k - U(\vec{q})$

obecná energie $E = \frac{1}{2} T_{jk}(\vec{q}) \dot{q}_j \dot{q}_k + \hat{U}(\vec{q})$

obecná hybnost $\vec{T} = (T_{kj}(\vec{q}))$ symetrická pozitivně definitní matice

$h_i = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} T_{jk} \partial_{\dot{q}_i} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} T_{jk} \dot{q}_j \partial_{\dot{q}_i} \dot{q}_k = \frac{1}{2} (T_{ik} \dot{q}_k + T_{ji} \dot{q}_j) = T_{ik} \dot{q}_k \quad / (\vec{T}^{-1})_{ji} \Rightarrow (\vec{T}^{-1})_{ji} h_i = (\vec{T}^{-1})_{ji} (T)_{ik} \dot{q}_k = \dot{q}_j$

Hamiltonova funkce $H = \frac{1}{2} T_{jk} (\vec{T}^{-1})_{ji} (\vec{T}^{-1})_{kl} h_i h_l + \hat{U}(\vec{q}) = \frac{1}{2} (\vec{T}^{-1})_{ji} \delta_{je} h_i h_e + U(\vec{q}) = \frac{1}{2} (\vec{T}^{-1})_{ij} h_i h_j + \hat{U}(\vec{q})$

Konfigurační prostor M – polohy systému, $\dim M = \Delta$ souřadnice (q_1, \dots, q_Δ)

Fázový prostor Γ – stavů systému, $\dim \Gamma = 2\Delta$ souřadnice $(q_1, \dots, q_\Delta, p_1, \dots, p_\Delta)$

Pozn. hybnost "klasická" (kinetická) $\vec{p} = m\vec{\dot{x}}$ vektor X hybnost obecná (kanonická) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ kovektor

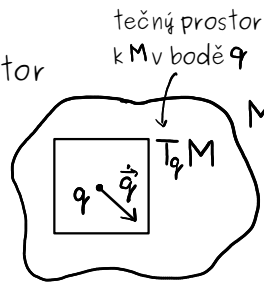
Pozn. Geometrie

Rychlostní fázový prostor
(tečný bandl)

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M$$

Lagrangeova funkce

$$L: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

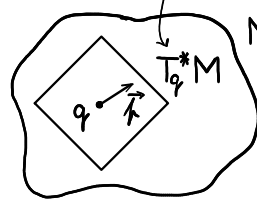


$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Legendreova transformace

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

duální vektorový prostor $k_{T_q^* M}$



Fázový prostor
(kotečný bandl)

$$\Gamma = T^* M = \bigcup_{q \in M} T_q^* M$$

Hamiltonova funkce

$$H: \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Hamiltonovy rovnice (dynamický systém na fázovém prostoru)

Vektorové pole (hamiltonovské)

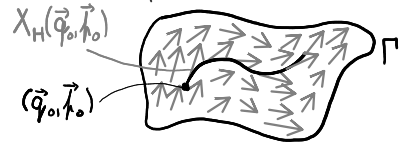
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} d\lambda \quad q_i(\lambda + d\lambda) = q_i(\lambda) + \frac{\partial H}{\partial p_i} d\lambda$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} d\lambda \quad p_i(\lambda + d\lambda) = p_i(\lambda) - \frac{\partial H}{\partial q_i} d\lambda$$

Taylor do 1. řádu v $d\lambda \Rightarrow$ numerické řešení

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

bazické vektory tečného prostoru k fázovému prostoru Γ v daném bodě



Fázová trajektorie – je řešení Hamiltonových rovnic $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$

– je určena jednoznačně počátečními podmínkami $\vec{q}(0) = \vec{q}_0, \vec{p}(0) = \vec{p}_0$

– každým bodem Γ prochází právě jedna fázová trajektorie

– je integrální křivka pole X_H parametrizovaná časem tj. její tečný vektor v každém bodě (\vec{q}, \vec{p}) je $X_H(\vec{q}, \vec{p})$

Pozn. Hamiltonián H (resp. pole X_H) je generátorem časového vývoje = toku vektorového pole X_H

Fázový portrét – obraz na kterém jsou fázové trajektorie pro všechny počáteční podmínky

(zobrazuje tzv. hamiltonovský tok – tok hamiltonovského vektorového pole X_H)

Př. Harmonický oscilátor $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m} \quad H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$

Hamiltonovy rovnice

Fázová trajektorie

Hamiltonovské vektorové pole

$$X_H = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -kq \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned} \right\} \text{řešení}$$

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0$$

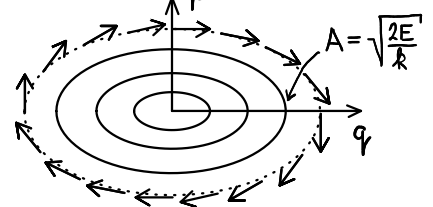
$$q(\lambda) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \lambda + B\right)$$

$$p(\lambda) = -\frac{\sqrt{k m}}{\sqrt{2mE}} A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \lambda + B\right)$$

Fázový portrét

Integrál pohybu

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow E = \text{konst.} \Rightarrow H = \text{konst.} \quad \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = E \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} = 1$$



Poissonovy závorky a Integrály Pohybu

Funkce $F = F(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$ na fázovém prostoru se nazývá integrálem pohybu (I. P.), pokud pro každou fázovou trajektorii $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda), \lambda) = c \quad \forall \lambda$.

$$\tilde{F}(\lambda) = F(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda), \lambda) = c \iff 0 = \frac{dF}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{H.R.} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

Věta Funkce $F(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$ je integrálem pohybu pro systém s Hamiltonovou funkcí $H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$

$$\iff \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

Poissonova závorka diferencovatelných funkcí F, G

na fázovém prostoru

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k}$$

Pozn. $\{.,.\} : C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$

Vektorový prostor hladkých funkcí na Γ
tj. fci. třídy C^∞ na Γ

Vlastnosti Poissonových závorek $\forall F, G, F_1, F_2, F_3 \in C^1(\Gamma)$ platí:

- 1) antisymetrie $\{F, G\} = -\{G, F\} \Rightarrow \{F, F\} = 0$
- 2) bilinearita $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- 3) Jacobiho identita $\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$
- 4) Leibnitzovo pravidlo $\{F_1 \cdot F_2, G\} = \{F_1, G\} \cdot F_2 + F_1 \cdot \{F_2, G\}$
- 5) derivace podle parametru $\frac{\partial}{\partial \lambda} \{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \lambda}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right\}$
- 6) fundamentální Poissonovy závorky $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

Lineární algebra je vektorový prostor V vybavený bilineární operací: $\forall x, y \in V$.
Lieova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\})$ je lineární algebra jejíž operace je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu.
Poissonova algebra $(C^\infty(\Gamma), \{.,.\}, \cdot)$
Asociativní algebra je lineární algebra jejíž operace je asociativní.

Hamiltonovy rovnice $\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \forall i \in \hat{n} \rightarrow q_i, p_i$ jsou tzv. kanonicky sdružené proměnné

Pozn. Q, M pozorovatelným A, B přiřadí samosdružené operátory \hat{A}, \hat{B} na Hilbertově prostoru stavů (kvadr. int. vlnových funkcí $\Psi(x, t)$), jejichž (reálné) vlastní hodnoty odpovídají měřitelným hodnotám veličin, tak aby $C = \{A, B\} \Rightarrow i \hbar \hat{C} = (\hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}) = [\hat{A}, \hat{B}]$
 $C = \{A_1, \dots, A_n\} \Rightarrow \hat{C} = \{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n\}$ (princip korespondence) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ kvůli rozměru (J.s) komutátor
např. $x_j \rightarrow \hat{x}_j(\Psi) = x_j \cdot \Psi \quad p_k \rightarrow \hat{p}_k(\Psi) = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \Psi \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i \hbar \delta_{jk} \quad \hat{H} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad (\hat{x}^2 = -1)$ kvůli samosdruženosti

Poissonova věta: Poissonova závorka dvou integrálů pohybu je opět integrálem pohybu.

I. P. tvoří Lieovu algebru

Dk. F_1, F_2 jsou I. P. pro systém s Hamiltonovou funkcí $H \quad \frac{dF_i}{d\lambda} \Big|_{H.R.} = \{F_i, H\} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0 \quad i=1,2$

$$\frac{d\{F_1, F_2\}}{d\lambda} \Big|_{H.R.} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \{F_1, F_2\} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}, F_2 \right\} + \left\{ F_1, \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} \right\} =$$

$$= \{\{F_1, F_2\}, H\} - \{\{F_1, H\}, F_2\} - \{F_1, \{F_2, H\}\} = \{\{F_1, F_2\}, H\} + \{\{H, F_1\}, F_2\} + \{F_1, \{F_2, H\}\} = 0$$

Integrály pohybu snadno najdeme na základě proměnných které chybí v předpisu Hamiltonovy funkce

- 1) čas $\lambda \quad H = H(\vec{q}, \vec{p})$ tj. $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{d\lambda} \Big|_{H.R.} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow$ Hamiltonova funkce $H = H(\vec{q}, \vec{p}) = \text{Konst.}$
- 2) cyklické souřadnice q_i tj. $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{Konst.}$ obdobně pro p_i tj. $\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow q_i = \text{Konst.}$

Odvození Hamiltonových rovnic z Hamiltonova principu - variace křivek $\vec{q}(\lambda)$ v konfiguračním prostoru

$$0 = \delta S = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \lambda) d\lambda = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\hat{p}_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\dot{q}_i \delta \hat{p}_i + \hat{p}_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta \hat{p}_i) d\lambda =$$

pro $\delta \vec{q}(\lambda_1) = 0$
 $\delta \vec{q}(\lambda_2) = 0$
 $\hat{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\left(-\hat{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta \hat{p}_i \right] d\lambda + \left[\hat{p}_i \delta q_i \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

Pracujeme v proměnných \vec{q}, \vec{p} a až při zápisu výsledných rovnic přejdeme od $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ k \vec{q}, \vec{p} a zrušíme tak sřečky u \vec{p}
Variace $\delta \vec{q}$ a $\delta \vec{p}$ nejsou navzájem nezávislé což nevadí neboť koeficienty u $\delta \vec{p}$ jsou nula.

II. $0 \leftarrow \text{ZLVP}$ vzájemně nezávislé I. derivace $= 0$ přímým výpočtem $= 0$ pevné konce

Modifikovaný Hamiltonův princip na fázovém prostoru - variace křivek $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ ve fázovém prostoru

$$0 = \delta \bar{S} = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\hat{p}_i \dot{q}_i - H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)) d\lambda \quad \text{Eulerovy-Lagrangeovy rce. pro funkcionál } \bar{S} \text{ (akci na fázovém pr.)}$$

pro $\delta \vec{q}(\lambda_1) = 0 = \delta \vec{q}(\lambda_2)$
 $\delta \vec{p}(\lambda_1) = 0 = \delta \vec{p}(\lambda_2)$ ← není nutné

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{d}{d\lambda} (\hat{p}_i \delta_{ij}) + \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \Rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_j} = 0 - \delta_{ij} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \Rightarrow \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

V této formulaci začínáme s akci \bar{S} na Γ . Variace $\delta \vec{q}$ a $\delta \vec{p}$ považujeme za nezávislé, stejně tak proměnné \vec{q}, \vec{p} , které již nejsou svázané definicí obecné hybnosti, nýbrž jen Hamiltonovými rovnicemi. V tomto smyslu již mají obě sady Hamiltonových rovnic dynamický obsah.

Kanonické transformace

Př. $H = H(\vec{p}, \lambda) \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i(\lambda) = \alpha_i \text{ Konst.}$
 $\forall i \in \hat{\Delta} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i(\vec{q}, \lambda) \Rightarrow q_i(\lambda) = \int \omega_i(\vec{q}, \lambda) d\lambda + q_{0i}$

Pokud najdeme transformaci na Γ která zachová tvar Hamiltonových rovnic a převede H na fci. nezávislé na \vec{q} je úloha vyřešena v kvadraturách.

Pozn. Bodové transformace $q_j = q_j(\vec{Q}, \lambda) \quad \forall j \in \hat{\Delta}$ konfiguračního pr. automaticky zachovávají tvar LR2D.

Hledáme transformace fázového prostoru Γ , které zachovávají tvar Hamiltonových rovnic

(1) $q_i = q_i(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) \quad \forall i \in \hat{\Delta}$ třídy C^2 tak, aby $\forall H = H(\vec{q}, \vec{p}, \lambda) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R}) \quad \exists K = K(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$
 $p_i = p_i(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda)$ invertibilní $\left| \frac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})} \right| \neq 0$ tak, že $\forall (\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ na Γ platí $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \iff \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}$
 $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \iff \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j}$
 Jacobián

Hamiltonovy rovnice lze odvodit z modifikovaného Hamiltonova principu

$\delta S_1 = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \underbrace{(p_i \dot{q}_i - H)}_{f(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)} d\lambda = 0 \quad \delta \vec{q}(\lambda_{1,2}) = 0 = \delta \vec{p}(\lambda_{1,2})$
 $\delta \vec{q}, \delta \vec{p}$ nezávislé
 $\delta S_2 = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \underbrace{(P_j \dot{Q}_j - K)}_{g(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda)} d\lambda = 0 \quad \delta \vec{Q}(\lambda_{1,2}) = 0 = \delta \vec{P}(\lambda_{1,2})$
 $\delta \vec{Q}, \delta \vec{P}$ nezávislé

oba funkcionály jsou definovány na stejném prostoru křivek a mají-li popisovat stejnou úlohu, musí nabývat stacionární hodnoty na stejných křivkách (pouze popsaných jinými souřadnicemi) to nastává v případech:

a) $S_2 = \lambda \cdot S_1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (P_j \dot{Q}_j - K) = \lambda (p_i \dot{q}_i - H) \quad \text{škálování} \quad Q_j = \mu q_j \quad P_j \dot{Q}_j - K = \mu \nu p_i \dot{q}_i - K = \lambda (p_i \dot{q}_i - H)$
 $\lambda \neq 0 \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R}) \quad P_j = \nu p_j \quad \Rightarrow \lambda = \mu \nu \wedge K = \mu \nu H$
 b) $S_1 = S_2 + C \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{vytvorující funkce}) \quad \exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) \in C^1(\Gamma \times \mathbb{R}) \quad p_i \dot{q}_i - H = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{d}{d\lambda} F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda)$

Transformace (1) pro kterou $\exists F = F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) \in C^1(\Gamma \times \mathbb{R})$ a $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall H \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R}) \quad \exists K \in C^2(\Gamma \times \mathbb{R})$ splňující $\lambda (p_i \dot{q}_i - H) = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{d}{d\lambda} F$ se nazývá 1. kanonická, pokud $\lambda = 1$

2. rozšířená kanonická, pokud $\lambda \neq 0, 1$ (lze získat jako 1. + škálování)

3. užší kanonická, pokud $\lambda = 1 \quad \frac{\partial Q_j}{\partial \lambda} = 0 = \frac{\partial P_j}{\partial \lambda}$ (bezčasová)

$dF(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) = p_i dq_i - P_j dQ_j + (K - H) d\lambda$

představuje rovnost dvou diferenciálních forem zapsaných v různých proměnných upravíme buď levou (\Rightarrow vytvořující fce.) nebo pravou stranu (\Rightarrow kritéria kanoničnosti)

Vytvořující funkce kanonické transformace - je funkce vytvořená z F přepisem (nebo Legendreovou tr.) do takové sady proměnných, kdy $\forall j \in \hat{\Delta}$ je vždy jedna z páru kanonicky sdružených proměnných Q_j, P_j ponechána velká (nová) a druhá převedena na malou (starou). Čtyři základní druhy vytvořujících fci:

① Vytvořující fce. 1. druhu $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, \lambda) = F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda)$ kde $\vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{Q}, \lambda) \leftarrow \left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \right| \neq 0$
 $dF_1(\vec{q}, \vec{Q}, \lambda) = p_i dq_i - P_j dQ_j + (K - H) d\lambda = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} d\lambda$

② $\frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad \forall i \in \hat{\Delta} \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -P_j \quad \forall j \in \hat{\Delta}$ hledáme-li transformaci danou fci. F_1 představují tyto vztahy definice \vec{p} a \vec{P}
 $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}$ transformace Hamiltoniánu hledáme-li vytvořující fci. pro danou transformaci, je třeba zapsat \vec{p}, \vec{P} jako fce. \vec{q}, \vec{Q} a řešit parciální dif. rce.

② $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P}, \lambda) = F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda) + P_j \hat{Q}_j = F_1 + P_j \hat{Q}_j \quad \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{P}, \lambda) \leftarrow \left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \right| \neq 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial \lambda}$
 $dF = d(F_2 - P_j \hat{Q}_j) = p_i dq_i - P_j dQ_j + (K - H) d\lambda \Rightarrow dF_2(\vec{q}, \vec{P}, \lambda) = p_i dq_i + Q_j dP_j + (K - H) d\lambda$ Legendreova tr. fce. F_1

③ $F_3(\vec{p}, \vec{Q}, \lambda) = F_1 - p_i q_i \quad \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -P_j$
 ④ $F_4(\vec{p}, \vec{P}, \lambda) = F_1 - p_i q_i + P_j Q_j \quad \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

Kriteria kanoničnosti - nutné a postačující podmínky pro kanoničnost transformace: $q_i = q_i(\bar{Q}, \bar{P}, \Lambda)$

$$dF(\bar{Q}, \bar{P}, \Lambda) = f_i dq_i - P_j dQ_j + (K-H)d\Lambda = \underbrace{(f_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - P_j)}_{\frac{\partial F}{\partial Q_j}} dQ_j + \underbrace{f_i \frac{\partial q_i}{\partial P_j}}_{\frac{\partial F}{\partial P_j}} dP_j + \underbrace{(K-H + f_i \frac{\partial q_i}{\partial \Lambda})}_{\frac{\partial F}{\partial \Lambda}} d\Lambda$$

pokud má F existovat musí být tato diferenciální forma uzavřená

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial P_j} dP_j + \frac{\partial q_i}{\partial \Lambda} d\Lambda$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial Q_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_k \partial Q_j} \quad \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} \quad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial f_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = [Q_j, Q_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial P_j \partial P_k} \quad \frac{\partial f_i}{\partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial P_j} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k \partial P_j} = \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_j \partial P_k} \quad 0 = \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \frac{\partial f_i}{\partial P_k} - \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [P_j, P_k]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial P_k \partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_j \partial P_k} \quad \frac{\partial f_i}{\partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial P_k \partial Q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial P_k} = \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} + f_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_j \partial P_k} \quad \delta_{jk} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial f_i}{\partial P_k} - \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = [Q_j, P_k]$$

zbylé podmínky jsou definičními vztahy pro fci. K a na transformaci již nekladou žádná další omezení

Ⓘ. $[Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \hat{\Delta}$ Lagrangeovy závorky - definované pro souřadnice fázového prostoru
 $[Q_j, Q_k] = 0 = [P_j, P_k]$ $[Q_j, P_k]_{(q, p)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial f_i}{\partial P_k} - \frac{\partial f_i}{\partial Q_j} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \right)$ indexem u závorek jsou někdy značeny funkce které se v nich derivují

Pozn. $[Q_j, P_k]_{(q, p)} = \frac{\partial Q_j}{\partial Q_j} \frac{\partial P_k}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial Q_j} = \delta_{ij} \delta_{ik} - 0 = \delta_{jk} = [Q_j, P_k]_{(q, p)}$ Lagrangeovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

Jednotné souřadnice fázového prostoru Γ - zjednoduší zápis, reflektují rovnocennost \vec{q} a \vec{p}

$$\begin{aligned} \mu_i &= q_i & \forall i \in \hat{\Delta} & & \vec{\mu} &= \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} & \text{Hamiltonovy rovnice} & \dot{\mu}_i &= J_{i,k} \frac{\partial H}{\partial \mu_k} & \forall i \in \hat{2\Delta} & & \dot{\vec{\mu}} &= J \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{\mu}} \right)^T \\ \mu_{n+i} &= p_i & & & & & \text{Poissonovy závorky} & \{F, G\}_{\mu} &= \frac{\partial F}{\partial \mu_i} J_{i,k} \frac{\partial G}{\partial \mu_k} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\mu}} \right)^T J \left(\frac{\partial G}{\partial \vec{\mu}} \right)^T \\ & & & & & & \text{Lagrangeovy závorky} & [F, G]_{\mu} &= \frac{\partial \mu_i}{\partial F} J_{i,k} \frac{\partial \mu_k}{\partial G} &= \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial F} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial G} \right) \end{aligned}$$

(symplektická) matice řádu $2\Delta \times 2\Delta$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2\Delta} \\ -\mathbb{1}_{2\Delta} & 0 \end{pmatrix} \in SO(2\Delta) \quad J^{-1} = J^T = -J \quad J^2 = -\mathbb{1}_{2\Delta} \quad \det J = 1 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \vec{\mu}} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \mu_{2\Delta}} \right) \quad \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial F} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial F} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mu_{2\Delta}}{\partial F} \end{pmatrix}$$

Transf. (1) $\mu_j = \mu_j(\vec{Z}, \Lambda)$ třídy $C^2 \quad \forall j \in \hat{2\Delta} \quad \left| \frac{\partial \mu_j}{\partial \vec{Z}} \right| = \left| \left(\frac{\partial \mu_j}{\partial Z_k} \right) \right| \neq 0$ je kanonická \Leftrightarrow

Ⓘ. $J_{i,k} = [Z_i, Z_k]_{\mu} = \frac{\partial \mu_m}{\partial Z_i} J_{m,l} \frac{\partial \mu_l}{\partial Z_k} = \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \vec{Z}} \right)_{mi} J_{m,l} \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \vec{Z}} \right)_{lk} = \left(\left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \vec{Z}} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \vec{Z}} \right) \right)_{i,k} \Leftrightarrow [Q_j, P_k] = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \hat{\Delta} \quad \left. \begin{aligned} [Q_j, Q_k] &= 0 = [P_j, P_k] \end{aligned} \right\} \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right)$

Ⓙ. $J_{i,k} = \{Z_i, Z_k\}_{\mu} = \frac{\partial Z_i}{\partial \mu_m} J_{m,l} \frac{\partial Z_k}{\partial \mu_l} = \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right)_{im} J_{m,l} \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right)_{kl} = \left(\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right)^T J \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right) \right)_{i,k} \Leftrightarrow \{Q_j, P_k\} = \delta_{jk} \quad \forall j, k \in \hat{\Delta} \quad \left. \begin{aligned} \{Q_j, Q_k\} &= 0 \quad \{P_j, P_k\} = 0 \end{aligned} \right\}$

Ⓚ. Přímé (symplektické) podmínky symplektický - z řečtiny sym+plektikos = spletený dohromady (Weyl 1939)

$$J \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\mu}} \right) = \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \vec{Z}} \right)^T J \quad J_{i,l} \frac{\partial Z_l}{\partial \mu_k} = \frac{\partial \mu_l}{\partial Z_i} J_{l,k} \quad \forall i, k \in \hat{2\Delta} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}} & \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}} & -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{Q}} \right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{Q}} \right)^T \\ -\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{P}} \right)^T & \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{P}} \right)^T \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} &= -\frac{\partial f_j}{\partial Q_i} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} &= \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial f_j}{\partial P_i} & -\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} &= \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \end{aligned} \quad \forall i, j \in \hat{\Delta}$$

Pro časově nezávislou transformaci lze tyto podmínky odvodit i přímým výpočtem derivací složených funkcí z Hamiltonových rovnic.

Podobné (avšak pouze postačující) podmínky lze odvodit i z uzavřenosti forem dF_i , rozdíl je ve funkcích které zde vystupují. Např. pro $dF_i(\vec{q}, \vec{p})$ $\frac{\partial \hat{P}_i(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial \hat{f}_j(\vec{q}, \vec{p})}{\partial Q_i}$ vs. $\frac{\partial P_i(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_j} = -\frac{\partial f_j(\vec{q}, \vec{p})}{\partial Q_i}$ $\left| \frac{\partial(\vec{q}, \vec{p})}{\partial(\vec{Q}, \vec{P})} \right|$

Dk. $J = A^{-1} J A \Leftrightarrow J A^{-1} = A^{-1} J \Leftrightarrow J A^{-1} J = J A^{-1} J^2 \Leftrightarrow A^{-1} J = J A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} J (A^{-1})^T = J \Leftrightarrow J = A J A^T$

Ⓘ Ⓚ Ⓙ

Věta: Pro každou kanonickou transformaci platí $\overline{\{F, G\}}_{(q,p)} = \{\overline{F}, \overline{G}\}_{(Q,P)}$

Poissonovy závorky jsou invariantní při kanonické tr.

pruh označuje fce. vyjádřené ve velkých proměnných $\overline{F}(\vec{Z}, \Lambda) = F(\vec{\pi}(\vec{Z}, \Lambda), \Lambda)$

Dk. $\overline{\{F, G\}}_{\vec{z}} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \pi_i} J_{ik} \frac{\partial \overline{G}}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_l} \frac{\partial \overline{z}_l}{\partial \pi_i} J_{ik} \frac{\partial \overline{z}_m}{\partial \pi_k} \frac{\partial \overline{G}}{\partial z_m} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_l} \{z_l, z_m\}_{\vec{z}} \frac{\partial \overline{G}}{\partial z_m} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_l} J_{lm} \frac{\partial \overline{G}}{\partial z_m} = \{F, G\}_{\vec{z}}$

Matice $A \in \mathbb{R}^{2n, 2n}$ se nazývá symplektická $\Leftrightarrow A^T J = J A \Leftrightarrow J = A^T J A \Leftrightarrow J = A J A^T \Leftrightarrow A^{-1} J = J A^T$

Kriteria lze shrnout do věty: Transformace (1) je kanonická \Leftrightarrow její Jacobiho matice je symplektická.

Kanonické transformace tvoří grupu - tr. souřadnic (třídy $C^{(n)}$) na fázovém prostoru Γ tvoří grupu

- identická transformace je kanonická $\vec{\pi} = \vec{z} \quad \left(\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial \vec{z}}\right) = 1 \quad 1^T J \cdot 1 = J \quad (A^{-1})^T$
- inverzní tr. ke kanonické tr. je kanonická $A = \left(\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial \vec{z}}\right) \quad A^{-1} = \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{\pi}}\right) \quad J = A^T J A \Rightarrow \overbrace{(A^{-1})^T} J A^{-1} = J$
- složení kanonických tr. je kanonická tr. $\vec{\pi} = \vec{\pi}(\vec{z}, \Lambda) \quad \vec{Y} = \vec{Y}(\vec{\pi}, \Lambda) \quad B = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{\pi}}\right) \quad \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{z}}\right) = \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial \vec{\pi}}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial \vec{z}}\right) = B \cdot A$

Lze to dokázat i pomocí vytvořujících funkcí, ty se při skládání transformací počítají.

$$(BA)^T J (BA) = A^T \underbrace{(B^T J B)}_J A = A^T J A = J$$

\Rightarrow symplektické matice tedy tvoří grupu tzv. symplektická grupa $S_{\mathbb{R}}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2n, 2n} \mid A^T J A = J\}$

Tvrzení: Determinant libovolné symplektické matice je roven jedné tj. $\forall A \in S_{\mathbb{R}}(2n, \mathbb{R}) \quad \det A = 1$

Dk. Pfaffián definovaný pro $A \in \mathbb{R}^{2n, 2n}, A^T = -A \quad Pf(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} \text{sgn } \pi \prod_{i=1}^n A_{\pi(2i-1), \pi(2i)} \quad Pf\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a$
 má vlastnosti $\det A = (Pf A)^2 \quad \forall B \in \mathbb{R}^{2n, 2n} \quad Pf(B^T A B) = \det B Pf A \quad Pf J = Pf(A^T J A) = \det A Pf J \Rightarrow \det A = 1$

Pozn. Kriteria kanoničnosti nekladou žádné podmínky na funkce K, H (kanoničnost tr. nezávisí na konkrétní fyzikální úloze) ani na časový průběh transformace. Proto lze čas považovat za nezávislý parametr a na časově závislou tr. nahlížet jako na jednoparametrickou množinu po sobě jdoucích časově nezávislých transformací. Kanoničnost transformace znamená zachování symplektické formy.

Symplektický vektorový prostor (V, ω) je vektorový prostor V nad \mathbb{R} vybavený symplektickou formou ω

Symplektická forma ω na V je zobrazení $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, které je současně

- bilineární $\omega(x, y) = \omega(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j \omega(e_i, e_j) = x^i y^j \omega_{ij} = \vec{x}^T \omega \vec{y} \quad (\dim V = n \text{ a } (e_1, \dots, e_n) \text{ báze } V)$
- antisymetrické $\omega(x, y) = -\omega(y, x) \quad \forall x, y \in V \quad \left. \begin{matrix} \omega^T = -\omega \\ \det(\omega) \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dim V = 2n$
- nedegenerované $(\omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in V) \Rightarrow x = 0$

dimenze symplektického pr. je vždy sudá

Pozn. Ve V existuje tzv. symplektická báze ve které je $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} = J$

Automorfizmy (symetrie) prostoru (V, ω) jsou lineární bijekce $A: V \rightarrow V$ zachovávající formu ω

tj. $\omega(Ax, Ay) = \omega(x, y) \quad \forall x, y \in V$ v bázi $V \quad (A\vec{x})^T \omega A\vec{y} = \vec{x}^T A^T \omega A\vec{y} = \vec{x}^T \omega \vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Pozn. Nedegenerovanou bilineární formu lze využít k ztotožnění vek. pr. V a jeho duálu V^*

$\forall \omega \in V^* \exists \nu \in V \forall \mu \in V \quad \omega(\mu) = \omega(\mu, \nu)$ zobrazení $b_\omega(\nu) = \omega(\cdot, \nu)$ je izomorfismus V na V^*

Hamilton-Jacobiho rovnice (HJR)

Hledáme vytvořující funkci kanonické tr. 2. druhu $F_2(\vec{q}, \vec{P}, \lambda)$ která převede zadaný hamiltonián H na co nejjednodušší tvar tj. řeší rovnici $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = 0$ kde je dosazeno $f_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ do fce. $H(\vec{q}, \vec{f}, \lambda)$.

Což je parciální diferenciální rovnice určující jak F_2 závisí na \vec{q} a λ . Pak

Hledaná časově závislá transformace představuje přechod

$(\vec{q}, \vec{f}) \xrightarrow{F_2} (\vec{Q}, \vec{P})$ do souřadnic, ve kterých je systém v klidu.

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \Rightarrow Q_j = \text{Konst.}$$

$$\dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow P_j = \text{Konst.}$$

Pozn. Lze hledat i vytvořující funkce jiných druhů např. $F_3(\vec{f}, \vec{Q}, \lambda)$ – pak dosazujeme do H za $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial f_i}$

Hamilton-Jacobiho rovnice je parciální diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci S závisící na $\Delta+1$ navzájem nezávislých proměnných \vec{q}, λ .

$$H(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, \lambda) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$$

Její řešení (úplný integrál HJR) závisí na $\Delta+1$ integračních konstantách.

Neboť S vystupuje v rovnici pouze skrze své derivace, je určeno až na aditivní konstantu, kterou lze považovat za jednu z těchto $\Delta+1$ konstant. Zbylých Δ konstant označíme P_1, \dots, P_Δ .

Řešení HJR $S = S(\vec{q}, \lambda, \vec{P})$, nazývané hlavní funkce Hamiltonova, obsahuje úplnou informaci o systému.

Jacobiho věta: Hlavní funkce Hamiltonova $S(\vec{q}, \lambda, \vec{P})$ je vytvořující funkce kanonické transformace $(\vec{Q}, \vec{P}) \rightarrow (\vec{q}, \vec{f})$ která udává pohyb dané soustavy tj.

Pozn. k $\frac{\partial S}{\partial \vec{P}}$ fce. $S(\vec{q}, \lambda, \vec{P})$ je funkci $2\Delta+1$ nezávislých proměnných $\vec{q}, \lambda, \vec{P}$ přičemž proměnné \vec{P} jsou konstanty (integrály pohybu) pouze pro soustavu popsanou Hamiltonovou funkcí H . Tr. danou fci. S lze použít i na jiný systém se stejným Δ , pak ale \vec{P} nemusí být konst.

$\forall j \in \hat{\Delta}$

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}(\vec{q}, \lambda, \vec{P}) \rightarrow q_i = q_i(\lambda, \vec{Q}, \vec{P})$$

$$f_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}(\vec{q}, \lambda, \vec{P}) \rightarrow f_i = f_i(\lambda, \vec{Q}, \vec{P})$$

$\forall i \in \hat{\Delta}$ } je fázová trajektorie soustavy s Hamiltonovou funkcí $H = -\frac{\partial S}{\partial \lambda} \Big|_{(\vec{q}, \lambda, \vec{P}(\vec{q}, \lambda, \vec{P}))}$

Řešení HJR – separací proměnných. Pokud $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$, separujeme čas $S = -E(\vec{P})\lambda + S_0(\vec{q}, \vec{P})$ a hledáme charakteristickou funkci Hamiltonovu $S_0(\vec{q}, \vec{P})$ jako řešení bezčasové HJR $H(\vec{q}, \frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}) = E$

Význam hlavní funkce Hamiltonovy

$$S(\vec{q}, \lambda, \vec{Q}) = \int_{\lambda_0(\vec{Q})}^{\lambda(\vec{q})} L(\vec{q}(\lambda), \dot{\vec{q}}(\lambda), \lambda) d\lambda$$

$$\frac{dS}{d\lambda} \Big|_{H.R.} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{\partial S}{\partial P_k} \dot{P}_k = f_j \dot{q}_j - H = L$$

derivace podél fázové trajektorie vytvořující fce. HJR integrál pohybu

Hlavní fce. Hamiltonova je akce vypočtená podél skutečné trajektorie v konfiguračním prostoru vycházející v čase λ_0 z bodu \vec{Q} (s hybností $\vec{P} = -\frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}$) jako funkce "horní meze" \vec{q} v čase λ .

Charakteristická fce. Ham. je zkrácená akce vypočtená podél skutečné trajektorie $\frac{dS_0}{d\lambda} \Big|_{H.R.} = \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \dot{q}_i = f_i \dot{q}_i$ $S_0 = \int f_i dq_i$

Př. Volný hmotný bod $L = \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2$ $H = \frac{p_i^2}{2m}$ HJR $H + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$ $f_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ $\sum_{i=1}^{\Delta} \frac{1}{2m} (\frac{\partial S}{\partial q_i})^2 + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$

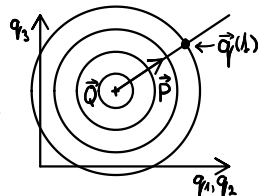
$$q_i(\lambda) = Q_i + v_i \lambda \quad v_i = \frac{q_i - Q_i}{\lambda} = \text{konst.} \quad \lambda_0 = 0 \text{ čas kdy } \vec{q}(\lambda) = \vec{Q}$$

$$S = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{2} m v_i^2 d\lambda = \left[\frac{1}{2} m v_i^2 \lambda \right]_{\lambda_0}^{\lambda} = \frac{1}{2} m v_i^2 \lambda = \frac{m}{2\lambda} (q_i - Q_i)^2$$

Pozn.

1) $S = S(\vec{q}, \lambda, \vec{Q})$ lze považovat za rovnici vlnoplochy šířící se konfiguračním pr. M .

Pro dané λ představuje $S(\vec{q}, \lambda, \vec{Q}) = \text{konst.}$ rovnici nadplochy v konf. pr. M , která se při změně λ šíří jako "čelo rázové vlny". Bod popisující konfiguraci systému je bodem této nadplochy určeným podmínkou $\vec{P} = -\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}$. Kanonická hybnost $\vec{f} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla S$ je normálou k této nadploše a pokud je rovnoběžná s obecnou rychlostí $\dot{\vec{q}}$, pak trajektorie jsou kolmé k nadplochám. Na vývoj systému tak lze pohlížet jako šíření vlnoplochy v konfiguračním prostoru a na trajektorie jako na paprsky.



2) Rovnice eikonálu ve vakuu $\sum_{i=1}^{\Delta} v^2 (\frac{\partial \Psi}{\partial x_i})^2 = (\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda})^2$ odpovídá HJR fotonu $H = c \sqrt{f^2 + m_0^2 c^2}$, $\sum_{i=1}^{\Delta} c^2 (\frac{\partial S}{\partial x_i})^2 + m_0^2 c^4 = (\frac{\partial S}{\partial \lambda})^2$

3) Schrödingerova rce. $i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \hat{H} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(\vec{x}) \cdot \Psi$ pro vlnovou funkci $\Psi = \Psi(\vec{x}, \lambda)$ kde $P_{\text{ob}}(\vec{x}, \lambda) = \nabla \Psi \cdot d\vec{v}$

hledáme-li řešení tvaru $\Psi(\vec{x}, \lambda) = C \exp[\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, \lambda)]$ pak rovnice pro S $\frac{1}{2m} (\frac{\partial S}{\partial \vec{x}_i})^2 + U(\vec{x}) + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{i \hbar}{2m} \Delta S$

v limitě pro $\hbar \rightarrow 0$ přejde na HJR (Klasická limita kvantové mechaniky)


Bezčasová Schr. rce. $\hat{H} \Psi = E \Psi$ – hledání vlastních vektorů \hat{H} odpovídá řešení bezčasové HJR.

Plochy konstantní fáze $S = \text{konst.}$ vlnové fce. Ψ kvant. mech. jsou v této limitě kolmé na klasické trajektorie.

Diferenciální formy vek. pr. V nad \mathbb{R} , (e_1, \dots, e_m) báze V , $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)$ duální báze V^* , $\varepsilon^i(e_j) = \delta_{ij}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$

k -tá vnější mocnina pr. V^* je reálný vek. pr. $\Lambda^k(V^*)$ všech (úplně) antisymetrických k -lineárních forem ω na V
tj. $\omega: \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ krát}} \rightarrow \mathbb{R}$ lineárních v každé složce a splňujících $\forall \pi \in S_k \quad \omega(\nu_{\pi(1)}, \dots, \nu_{\pi(k)}) = \text{sgn } \pi \omega(\nu_1, \dots, \nu_k) \quad \forall \nu_1, \dots, \nu_k \in V$

Vnější algebra vek. pr. V^* je vek. pr. $\Lambda V^* = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(V^*)$ nehomogenních forem spolu s bilineární asociativní operací
 $\wedge: \Lambda V^* \times \Lambda V^* \rightarrow \Lambda V^*$ nazývanou vnější součin, definovanou na homogenních formách $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, $\beta \in \Lambda^l(V^*)$ předpisem
 $(\alpha \wedge \beta)(\nu_1, \dots, \nu_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sgn } \pi \omega(\nu_{\pi(1)}, \dots, \nu_{\pi(k)}) \cdot \beta(\nu_{\pi(k+1)}, \dots, \nu_{\pi(k+l)}) \quad \forall \nu_1, \dots, \nu_{k+l} \in V$ a splňující $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$

$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{m}{k}$ Př. $V = \mathbb{R}^3$ $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ $\Lambda^1(V^*) = V^*$ $\Lambda^2(V^*)$ $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \sum_{\pi \in S_3} \text{sgn } \pi x^{\pi(1)} y^{\pi(2)} z^{\pi(3)} = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
 $\dim \Lambda V^* = 2^m$ báze (1) $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$ $(\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2, \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3, \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3)$  $\varepsilon^i(\vec{x}) = x^i$ báze $\Lambda^3(V^*)$

Diferenciální forma stupně k na Γ (k -forma) je zobrazení $\omega: \mathcal{L} \in \Gamma \rightarrow \omega(\mathcal{L}) \in \Lambda^k(T_{\mathcal{L}}^* \Gamma)$ které každému $\mathcal{L} \in \Gamma$ přiřadí k -lineární antisymetrickou formu na tečném prostoru $T_{\mathcal{L}} \Gamma$ ke Γ v bodě \mathcal{L} .

$\Omega^k(\Gamma)$ množina všech k -forem na Γ $\Omega^0(\Gamma)$ reálné funkce na Γ

Existuje právě jedno lineární zobrazení nazývané vnější derivace $d: \Omega^k(\Gamma) \rightarrow \Omega^{k+1}(\Gamma)$ $0 \leq k \leq 2\Delta - 1$ s vlastnostmi
1, $\forall f \in \Omega^0(\Gamma)$ je df diferenciál fce. f 2, $d \circ d = 0$ 3, $\forall \alpha \in \Omega^k(\Gamma) \forall \beta \in \Omega^l(\Gamma) \quad d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$

Symplektická forma ω na Γ je 2-forma $\omega \in \Omega^2(\Gamma)$ která je uzavřená ($d\omega = 0$) a nedegenerovaná ($d\omega \wedge \omega \neq 0$)

Na fázovém prostoru existuje globálně (díky jeho struktuře $\Gamma = T^*M$) kanonická Cartanova 1-forma $\theta = \sum_{i=1}^{\Delta} p_i dq_i$
 $d\theta = d(p_i dq_i) = dp_i \wedge dq_i + (-1)^0 p_i \wedge d(dq_i) = dp_i \wedge dq_i = \omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2\Delta} \omega_{ij} d\pi_i \wedge d\pi_j$ $(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \omega$

Kanoničnost tr. $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, \lambda)$ odpovídá existenci funkce $F(\vec{Q}, \vec{P}, \lambda)$ splňující podmínku $p_i dq_i - H d\lambda = p_j dQ_j - K d\lambda + dF$
vedoucí na kriteria kanoničnosti, která nezávisí na časovém vývoji transformace. Čas lze tedy (při zkoumání kanoničnosti) považovat za parametr, který určuje konkrétní bezčasovou kanonickou tr. z 1-parametrické množiny bezčasových kanonických tr. tvořících dohromady časově závislou kanonickou tr. a kanoničnost tak lze vyšetřovat pro každé pevné λ zvlášť, tj. $\lambda = \text{konst}$ $d\lambda = 0$ a podmínka přejde na
 $p_i dq_i = p_j dQ_j + dF$ odkud aplikací vnější derivace získáme $dp_i \wedge dq_i = dp_j \wedge dQ_j + ddF$ což je podmínka zachování symplektické formy

$$dp_i \wedge dq_i = dp_j \wedge dQ_j \quad \frac{1}{2} \omega_{ij} d\pi_i \wedge d\pi_j = \frac{1}{2} \omega_{kl} dZ_k \wedge dZ_l = \frac{1}{2} \omega_{kl} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \pi_i} d\pi_i \right) \wedge \left(\frac{\partial Z_l}{\partial \pi_j} d\pi_j \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial Z_k}{\partial \pi_i} \omega_{kl} \frac{\partial Z_l}{\partial \pi_j} d\pi_i \wedge d\pi_j$$

Kanonické transformace tedy představují symetrie fázového prostoru jakožto symplektické variety (Γ, ω) (tzv. symplektomorfismy).

Poincaréovy integrální invarianty

Bud' $D \subset \Gamma$ podvarieta sudé dimenze $2k$, $k \in \hat{\Delta}$ fázového prostoru (Γ, ω) , pak integrály $I^k[D] = \int_D \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_k$
jsou invarianty libovolné (aktivní) kanonické transformace $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ tj. $I^k[\phi(D)] = I^k[D]$

Dk. pouze pro $k=1$

$$I^1[\phi(D)] = \int_{\phi(D)} \omega = \int_{\phi(D)} dp_i \wedge dq_i = \int_D \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial p_i}{\partial t_j} dt_j \right) \wedge \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t_k} dt_k \right) = \int_D \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_j \wedge dq_k + \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial t_k} dq_j \wedge dt_k + \frac{\partial p_i}{\partial t_j} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dt_j \wedge dq_k + \frac{\partial p_i}{\partial t_j} \frac{\partial Q_i}{\partial t_k} dt_j \wedge dt_k = \int_D \frac{1}{2} [q_k, q_j]_{Q,P} dq_j \wedge dq_k + \underbrace{[q_k, t_j]_{Q,P}}_{\delta_{kj}} dt_j \wedge dq_k + \frac{1}{2} [t_k, t_j]_{Q,P} dt_j \wedge dt_k = \int_D dt_k \wedge dq_k = I^1[D]$$

Pozn. Objem na fázovém prostoru je určen pomocí nenulové 2s-formy, obvykle Liouvilleovy formy

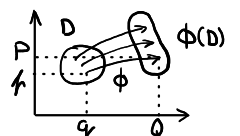
$$\text{objemu} \quad \Omega = \frac{1}{\Delta!} (-1)^{\frac{\Delta(\Delta-1)}{2}} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{\Delta \text{ krát}} = dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{\Delta} \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{\Delta} = d\pi_1 \wedge \dots \wedge d\pi_{2\Delta} \quad V(D) = \int_D \Omega$$

Liouvilleova věta 1) Velikost objemu libovolné oblasti D fázového prostoru Γ se při (aktivní) kanonické transformaci ϕ nemění tj. $V(D) = V(\phi(D))$

2) Při časovém vývoji systému se objem libovolné oblasti fázového prostoru nemění.

$$\text{Dk.} \quad V(\phi(D)) = \int_{\phi(D)} dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_{2\Delta} = \int_D \left(\sum_{i_1=1}^{2\Delta} \frac{\partial Z_1}{\partial \pi_{i_1}} d\pi_{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_{2\Delta}=1}^{2\Delta} \frac{\partial Z_{2\Delta}}{\partial \pi_{i_{2\Delta}}} d\pi_{i_{2\Delta}} \right) = \int_D \sum_{i_1, \dots, i_{2\Delta}=1}^{2\Delta} \frac{\partial Z_1}{\partial \pi_{i_1}} \dots \frac{\partial Z_{2\Delta}}{\partial \pi_{i_{2\Delta}}} d\pi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\pi_{i_{2\Delta}} = \int_D \sum_{i_1, \dots, i_{2\Delta}=1}^{2\Delta} \frac{\partial Z_1}{\partial \pi_{i_1}} \dots \frac{\partial Z_{2\Delta}}{\partial \pi_{i_{2\Delta}}} \text{sgn}(1 \dots 2\Delta) d\pi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\pi_{i_{2\Delta}} = \int_D \text{det} \left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \vec{\pi}} \right) d\pi_1 \wedge \dots \wedge d\pi_{2\Delta} = \int_D d\pi_1 \wedge \dots \wedge d\pi_{2\Delta} = V(D)$$

Pozn. Statistická mechanika – na časový vývoj statistického souboru ve fázovém pr. se lze dívat jako na proudění nestlačitelné kapaliny.



Duální povaha pozorovatelných veličin v Hamiltonově formalizmu

I. Pozorovatelné (veličiny) jsou reálné funkce $G: \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 na rozšířeném fázovém prostoru.

Stav systému je určen bodem ve fázovém prostoru o souřadnicích $(\vec{q}, \vec{p}) \in \Gamma$.

Výsledek měření pozorovatelné G v čase λ na systém ve stavu $(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda))$ dostaneme dosazením $G(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda), \lambda)$.

II. Pozorovatelná G je generátorem jednoparametrické grupy kanonických transformací fázového prostoru.

Pozorovatelná $G \in \Omega^0(\Gamma)$

1-forma $dG \in \Omega^1(\Gamma)$

Hamiltonovské vektorové pole X_G

$$G: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G = G(\vec{q}, \vec{p})$$

\xrightarrow{d}
vnější
derivace

$$dG = \frac{\partial G}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i$$

$\xrightarrow{\omega}$
symplektická
forma

$$X_G = \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} = \{ \cdot, G \} \quad \vec{X}_G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ -\frac{\partial G}{\partial q_i} \end{pmatrix}$$

vypočtené v \mathcal{L} jsou bázisní vektory $T_{\mathcal{L}}^* \Gamma$

Integrální křivka vektorového pole

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$$

$$g'(\varepsilon) = \frac{dg}{d\varepsilon} = X_G(g(\varepsilon))$$

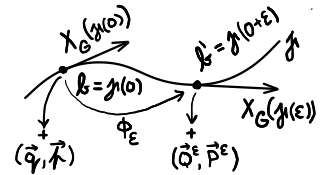
$$\frac{dq_i}{d\varepsilon} = \frac{\partial G}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{d\varepsilon} = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$g = g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \vec{q}(\varepsilon) \\ \vec{p}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

její tečný vektor je v každém bodě shodný s vektorem pole

Difr: Každým bodem oblasti $\Gamma \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna charakteristika (neprodložitelné řešení) $g: (a, b) \rightarrow \Gamma$. Tedy v každém bodě $\Gamma = \Gamma \times \{0\}$ začíná právě jedna integrální křivka.



(lokální) tok generovaný polem X_G

$$\phi_\varepsilon: \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$l \in \Gamma \quad l = g(0) \rightarrow \phi_\varepsilon(l) = g(0 + \varepsilon)$$

Vlastnosti toku

$$\phi_0 = \text{Id}_\Gamma \text{ identita}$$

$$\phi_\varepsilon \circ \phi_\lambda = \phi_{\varepsilon + \lambda}$$

$$\phi_\varepsilon^{-1} = \phi_{-\varepsilon}$$

Pokud je tok definovaný na celém \mathbb{R} pak představuje jednoparametrickou grupu kanonických transformací.

$$\varepsilon \in (-\alpha, \alpha) \subset \mathbb{R} \quad \phi_\varepsilon: (\vec{q}(0), \vec{p}(0)) \rightarrow (\vec{q}(\varepsilon), \vec{p}(\varepsilon))$$

Tok je lokální, pokud $\phi: \varepsilon \in (-\alpha, \alpha) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ nejde roztáhnout na celé \mathbb{R} .

(aktivní) transformace daná tokem ϕ_ε

$$Q_i^\varepsilon(\vec{q}, \vec{p}) = q_i(\varepsilon) = (\phi_\varepsilon(\vec{q}, \vec{p}))_i$$

$$\vec{q}(0) = \vec{q}$$

Infinitezimální verze transformace (Taylor v 0 do 1. řádu v ε)

$$Q_i^\varepsilon = q_i(0 + \varepsilon) = q_i(0) + \varepsilon \left. \frac{dq_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}(\vec{q}, \vec{p})$$

$$P_i^\varepsilon(\vec{q}, \vec{p}) = p_i(\varepsilon) = (\phi_\varepsilon(\vec{q}, \vec{p}))_{\alpha+i}$$

$$\vec{p}(0) = \vec{p}$$

$$P_i^\varepsilon = p_i(0 + \varepsilon) = p_i(0) + \varepsilon \left. \frac{dp_i}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}(\vec{q}, \vec{p})$$

Kanoničnost infinitezimální transformace (podmínka musí platit do 1. řádu v ε)

$$\begin{aligned} \{Q_i^\varepsilon, P_j^\varepsilon\} &= \{q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}\} - \varepsilon^2 \{ \frac{\partial G}{\partial p_i}, \frac{\partial G}{\partial q_j} \} = \delta_{ij} + \varepsilon \{ \{q_i, G\}, p_j \} - \varepsilon \{ q_i, \{G, p_j\} \} - \sigma(\varepsilon^2) = \\ &= \delta_{ij} + \varepsilon (\{ \{q_i, G\}, p_j \} + \{ \{G, p_j\}, q_i \}) - \sigma(\varepsilon^2) = \delta_{ij} - \varepsilon \{ \{p_j, q_i\}, G \} - \sigma(\varepsilon^2) = \delta_{ij} + \underbrace{\{ \delta_{ij}, G \}}_0 - \sigma(\varepsilon^2) = \delta_{ij} - \sigma(\varepsilon^2) \\ \{Q_i^\varepsilon, Q_j^\varepsilon\} &= \sigma(\varepsilon^2) = \{P_i^\varepsilon, P_j^\varepsilon\} \quad \forall i, j \in \hat{\Delta} \end{aligned}$$

Jacobiho id. $-\delta_{ij}$

Konečnou tr. lze získat složením (integrací) infinitezimálních tr. a neboť složení dvou kanonických tr. je kanonické bude i tato tr. kanonická. Pro infinitezimální tr. existuje i vytvořující fce. $F_2(\vec{q}, \vec{p}) = q_j p_j + \varepsilon G(\vec{q}, \vec{p})$

Př. $G = p_1 \quad dG = 1 \cdot dp_1 \quad X_G = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial p_1} \quad \frac{dq_1}{d\varepsilon} = 1 \quad q_1(\varepsilon) = \int 1 \cdot d\varepsilon + C = \varepsilon + q_1(0) \quad i=1,2 \quad Q_1 = q_1 + \varepsilon \quad P_1 = p_1$
 $\Delta = 2 \quad dp_1 \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} \quad \vec{X}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{dq_2}{d\varepsilon} = 0 \quad q_2(\varepsilon) = q_2(0) \quad \frac{dp_2}{d\varepsilon} = 0 \quad p_2(\varepsilon) = p_2(0) \quad Q_2 = q_2 \quad P_2 = p_2$
 $(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad dq_2 \leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial p_2} \quad$ funkce $G = p_1$ je generátorem translace

Teorém Noetherové v Hamiltonově formalizmu

Nechť fce. $F = F(\vec{q}, \vec{p})$ a Hamiltonova fce. $H = H(\vec{q}, \vec{p})$ nezávisí na čase, pak F je I.P. $\Leftrightarrow \{F, H\} = 0$

1) F je generátorem 1-param. grupy tr. $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}^\varepsilon, \vec{P}^\varepsilon) = (\vec{q}(\varepsilon), \vec{p}(\varepsilon))$

$$H(\vec{Q}^\varepsilon, \vec{P}^\varepsilon) = \hat{H}(\vec{q}, \vec{p}, \varepsilon) = H(\vec{q}(\varepsilon), \vec{p}(\varepsilon)) = H(\vec{q}(0), \vec{p}(0)) \quad 0 = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{d\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} = \{H, F\}$$

invariance H

2) H je generátorem časového vývoje $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}^\lambda, \vec{P}^\lambda) = (\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda)) \quad F(\vec{q}(\lambda), \vec{p}(\lambda)) = F(\vec{q}(0), \vec{p}(0)) \quad 0 = \left. \frac{dF}{d\lambda} \right|_{H.R.} = \{F, H\}$

Hamiltonián H je invariantní vůči 1-param. grupě tr. generované funkcí F (tj. H se zachovává podél integrálních křivek vek. pole X_F) $\Leftrightarrow F$ je invariantní vůči 1-param. grupě tr. generované Hamiltoniánem představující časový vývoj (tj. zachovává se podél integrálních křivek vek. pole X_H (fázových trajektorií) a je tedy integrálem pohybu). Tedy i ke každému IP. existuje 1-param. grupa symetrií Hamiltonovy fce.

Nabitá relativistická částice v elektromagnetickém poli

pro volnou částici

bez elmag. pole $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ kde $v^2 = \sum \dot{x}_i^2$

Taylorův rozvoj $\overbrace{-m_0 c^2}^{\text{konst.}} + \overbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}^T + \overbrace{\frac{1}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}}^{\text{moc malé}} + \dots$
 $-m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} - \dots\right)$

v elmag. poli

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -m_0 c^2 \frac{-2 \dot{x}_i \frac{v^2}{c^2}}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \delta_{ij} A_j = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e A_i$$

$$p_i - e A_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (p_i - e A_i)^2 = \frac{m_0^2 v_i^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\vec{p} - e \vec{A})^2 = \frac{m_0^2 v^2}{c^2 - v^2} \quad v^2 = \frac{c^2 (\vec{p} - e \vec{A})^2}{(\vec{p} - e \vec{A})^2 + m_0^2 c^2}$$

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e A_i v_i - \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})\right) = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \varphi$$

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{c^2 (\vec{p} - e \vec{A})^2}{(\vec{p} - e \vec{A})^2 + m_0^2 c^2}}} + e \varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{(\vec{p} - e \vec{A})^2 + m_0^2 c^2}}} + e \varphi = c \sqrt{\underbrace{(\vec{p} - e \vec{A})^2}_{\text{kanonická hybnost}} + \underbrace{m_0^2 c^2}_{\text{klidová hmotnost}}} + e \varphi$$

Věta o viriálu

střední časová hodnota funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(t)$ $\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$

Věta: Pokud $\exists F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, F omezená ($\exists K \in \mathbb{R}$, $|F(t)| \leq K, \forall t$) pak $\langle f \rangle = \langle \dot{F} \rangle = 0$.

Důkaz: $|\langle f \rangle| = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\tau} (F(\tau) - F(0)) \right| \leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left| \frac{2K}{\tau} \right| = 0$

Věta o viriálu v Hamiltonově formalizmu:

Jsou-li $q_i(t)$ a $p_i(t) \forall i \in \hat{N}$ omezené funkce pak $\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \rangle$ (pokud existují).

Značení: pro funkci $Z = Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, t)$, $Z: \mathbb{R}^{6n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a funkce $\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\alpha(t) \forall \alpha \in \hat{N}$

označíme $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) = Z(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{p}_1(t), \dots, \tilde{p}_n(t), t)$, $\tilde{Z}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ složenou funkcí

(1870 Rudolf Clausius) – vztah pro střední časovou hodnotu kinetické energie

Věta o viriálu: Označme $G = \sum_{\alpha=1}^n \vec{p}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha$ a $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha^2$ pak pro libovolné řešení $\tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\alpha(t)$ Newtonových

pohybových rovnic $m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha = \vec{F}_\alpha \forall \alpha \in \hat{N}$ platí $\langle \frac{dG}{dt} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{T} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha \rangle$

Důkaz: $2\dot{T} = \sum m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha^2 = \left(\sum m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha \cdot \dot{\vec{x}}_\alpha\right)' - \sum m_\alpha \ddot{\vec{x}}_\alpha \cdot \dot{\vec{x}}_\alpha = \dot{G} - \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha$ viriál

Jsou-li navíc síly \vec{F}_α potenciální tj. $\vec{F}_\alpha = -\nabla_{\vec{x}_\alpha} U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_\alpha}$ a potenciál $U = U(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ je homogenní funkce stupně k v proměnných $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ pak $\langle \dot{G} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{T} \rangle = \frac{k}{2} \langle \dot{U} \rangle$

Důkaz: $\sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \vec{x}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{\alpha i} \cdot x_{\alpha i} = -\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha i}} x_{\alpha i} = -kU$

Označíme-li $E = T + U$ pak $\langle \dot{E} \rangle = \langle \dot{T} \rangle + \langle \dot{U} \rangle = \left(1 + \frac{k}{2}\right) \langle \dot{U} \rangle$ a platí $\langle \dot{U} \rangle = \frac{2}{k+2} \langle \dot{E} \rangle$

Je-li navíc $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ pak $\dot{E} = \text{konst.}$ je celková energie a $\langle \dot{E} \rangle = E$ $\langle \dot{T} \rangle = \frac{k}{k+2} \langle \dot{E} \rangle$