

# Historický úvod

Martin Štefaňák

24. září 2020

- 1 Úvod
- 2 Záření absolutně černého tělesa
- 3 Fotoefekt
- 4 Comptonův rozptyl
- 5 de Broglieho hypotéza, vlnová funkce
- 6 Schrödingerova rovnice
- 7 Bornova interpretace
- 8 Dvouštěbinový experiment

- Popisujeme fyzikální procesy probíhající na úrovni atomů
  - Rozměry  $\sim 10^{-8} - 10^{-12}$  m
  - Hmotnosti  $\sim 10^{-25} - 10^{-31}$  kg
  - Energie  $\sim 10^{-1} - 10^3$  eV
- Klasická fyzika v mikrosvětě selhává
- Nemáme s těmito jevy přímou zkušenost
- Chybí nám intuice pro fyzikální popis mikrosvětě

- Absorbuje a emituje EM záření na všech vlnových délkách
- Lze realizovat pomocí dutiny, jejíž stěny jsou zahřáté na konstantní teplotu  $T$

## Spektrální hustota energie

$$\rho(\nu, T) = ?$$

## Stefan-Boltzmannův zákon

Celková vyzářená energie je úměrná čtvrté mocnině teploty

$$E(T) = V \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \sim T^4$$

## Wienův posunovací zákon

Frekvence, na které je vyzářeno maximum energie, je přímo úměrná teplotě

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

## Wienův vztah

Pro velké frekvence přibližně platí

$$\rho(\nu, T) \sim \nu^3 e^{-\alpha\nu/T}$$

## Rayleigh-Jeansův vztah

Pro malé frekvence přibližně platí

$$\rho(\nu, T) \sim \nu^2 kT$$

# Energie EM pole v dutině

- Maxwellovy rovnice pro EM pole v dutině s okrajovými podmínkami na stěnách
- Obecné řešení lze rozložit do módů určených  $\vec{m} \in \mathbb{Z}_+^3$  a polarizací
- Časový vývoj módu - LHO s frekvencí  $\nu_m = \frac{c}{2L} m$
- Energie módu odpovídá energii LHO  $\varepsilon(\nu_m, T)$
- Tepelná rovnováha s okolím  $\implies$  přejdeme ke středním hodnotám
- Limita velkého objemu  $\implies$  přejdeme od sumy k integrálu

$$\langle E \rangle = V \int_0^{\infty} \langle \varepsilon(\nu, T) \rangle \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

## Spektrální hustota energie

$$\rho(\nu, T) = \langle \varepsilon(\nu, T) \rangle \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

## Klasický harmonický oscilátor

- Ekvipartiční teorém - za kvadratický člen v hamiltoniánu  $\frac{1}{2}kT$

$$\langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = kT$$

- Rayleigh-Jeansův vztah

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$$

- UV divergence - celková energie je nekonečná



# Planckův vztah

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Malé frekvence - Rayleigh-Jeans

$$h\nu \ll kT \implies \rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$$

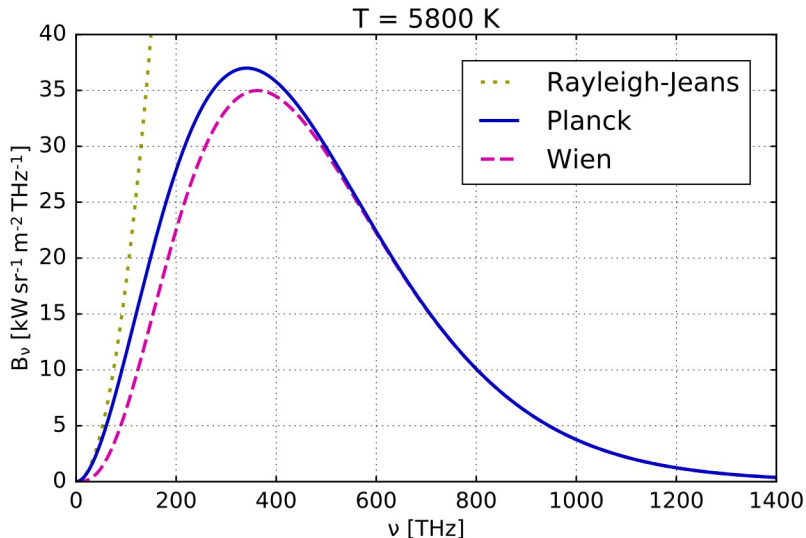
Vysoké frekvence - Wien

$$h\nu \gg kT \implies \rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Splňuje Stefan-Boltzmannův zákon

$$E(T) = V \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu \sim T^4$$

# Srovnání Planck, Rayleigh-Jeans, Wien



## Střední hodnota energie LHO

$$\langle \varepsilon(\nu, T) \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

## Kvantování energie

Lze odvodit, pokud energie oscilátoru mohou nabývat pouze diskrétních hodnot, které jsou celočíselným násobkem základního kvanta energie

$$E_n = nh\nu, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

Hraje kvantum záření roli i v jiných procesech?

- UV záření způsobuje emisi elektronů z kovů
- Pro každý kov existuje jistá mezní frekvence  $\nu_0$
- Pro  $\nu < \nu_0$  k emisi nedojde
- Kinetická energie vyletujících elektronů nezávisí na intenzitě UV

## Einsteinovo vysvětlení

Jedno kvantum záření předá celou svojí energii jednomu elektronu

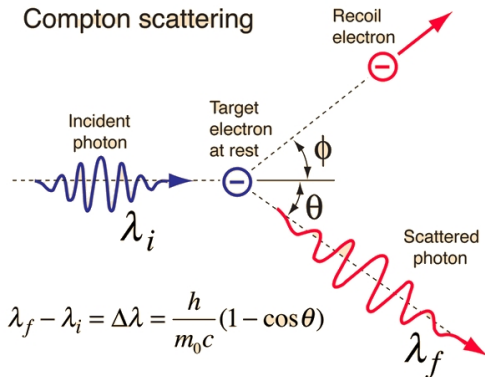
$$E_{kin} = h\nu - E_{ion}$$

Světlo se chová jako proud kvant s energií

$$E = h\nu$$

# Comptonův rozptyl

- Rozptyl rentgenového záření na volných elektronech v grafitu
- Výsledky odpovídají srážce částice s nulovou klidovou hmotností s elektronem



Kvantum záření má hybnost

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

## Částicové chování

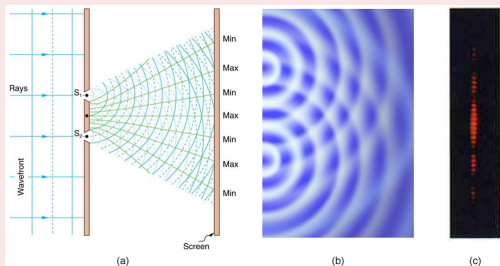
- Žáření absolutně černého tělesa
- Fotoefekt
- Comptonův rozptyl

$$E = h\nu$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

## Vlnové chování

- Interference
- Difrakce



- Částicově-vlnový dualismus je obecnou vlastností mikroskopických objektů
- Vztahy  $E = h\nu$  a  $p = \frac{h}{\lambda}$  platí i pro hmotné částice

## Vlnová funkce

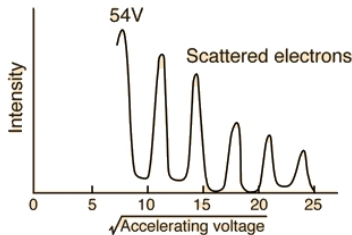
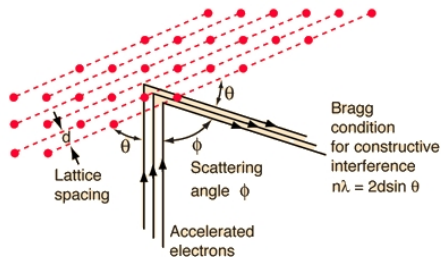
$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

## Vlnové chování hmotných částic?

de Broglieho vlnová délka  $\lambda$  musí být srovnatelná s velikostí objektu  $d$

- Davison a Germer zkoumali rozptyl elektronů na krystalu niklu
- Dochází k difrakci
- Elektrony se chovají jako vlny

$$\lambda = \frac{h}{p}$$





$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t)$  musí být řešením nějaké vlnové rovnice

(Časová) Schrödingerova rovnice

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Hamiltonián - operátor celkové energie

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\vec{x}).$$

- Schrödingerova rovnice je lineární v  $\psi$
- Lineární kombinace dvou řešení je opět řešení

$$\hat{H}\psi_j = i\hbar \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \implies \psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

- Analogicky pro libovolný počet řešení

$$\psi = \sum_j a_j \psi_j$$

$$\hat{H}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

- Řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice — stacionární stavy

$$\hat{H}\psi = E\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \implies \psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\vec{x})$$

- de Broglieho vlna je stacionární stav volné částice s  $E = \frac{p^2}{2M}$

$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}Et}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \implies \hat{H}\psi_{\vec{p},E} = \frac{p^2}{2M}\psi_{\vec{p},E}$$

# Bezčasová Schrödingerova rovnice

- Schrödinger našel řešení pro elektron v atomu vodíku

$$V(r) \sim -\frac{1}{r}$$

- Výsledky odpovídají Bohrovu modelu

$$E_N = -\frac{R}{N^2}, \quad N \in \mathbb{N}$$

- Vlnová funkce  $\psi_N(\vec{x})$  musí být kvadraticky integrabilní

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi_N(\vec{x})|^2 d^3x < \infty$$

# Bornova interpretace vlnové funkce

- Vlnová funkce představuje popis stavu kvantové částice
- $\psi(\vec{x}) \sim$  amplituda pravděpodobnosti nalezení částice v bodě  $\vec{x}$

$$|\psi(\vec{x})|^2 \sim w_\psi(\vec{x})$$

- Předpovědi kvantové mechaniky mají pravděpodobnostní charakter

$$W(\vec{x} \in V) \sim \int_V |\psi(\vec{x})|^2 d^3x$$

- Vlnové funkce musí být kvadraticky integrabilní

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = K < \infty \longrightarrow w_\psi(\vec{x}) = \frac{|\psi(\vec{x})|^2}{K}$$

- de Broglieho vlna není kvadraticky integrabilní

$$\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)} \implies |\psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t)|^2 = |A|^2 = \textit{konst.}$$

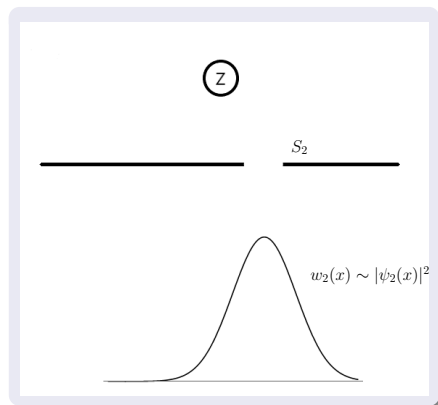
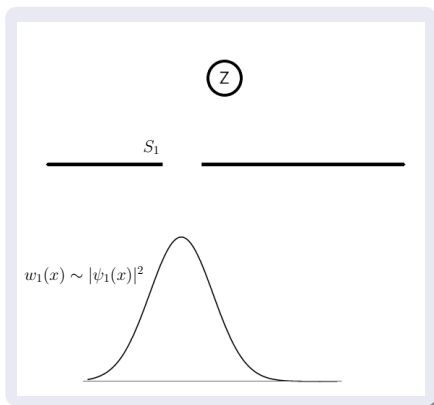
- de Broglieho vlna nepopisuje fyzikálně realizovatelný stav částice
- Kvantová částice nemůže mít absolutně přesně určenou hybnost
- Můžeme ale realizovat superpozici

$$\psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}(\vec{p}) \psi_{\vec{p},E}(\vec{x}, t) d^3p$$

- Pokud  $\tilde{\psi}(\vec{p})$  je kvadraticky integrabilní, pak je i  $\psi(\vec{x}, t)$

# Dvoušterbinový experiment

- Otevřená jen jedna šterbina  $S_j$  — stav částice popsany  $\psi_j(x)$



Pravděpodobnost dopadu do bodu  $x$

$$w_j(x) \sim |\psi_j(x)|^2$$

# Dvoušterbinový experiment

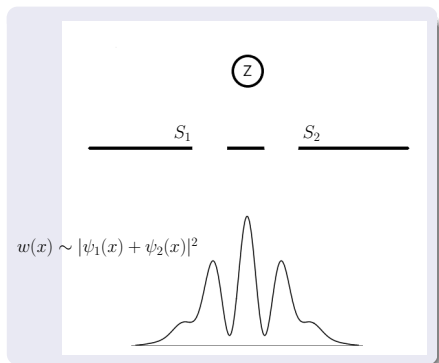
- Otevřené obě šterbiny, není možné rozlišit, kterou částice prošla
- Stav částice - superpozice

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

- Sčítají se amplitudy
- Pravděpodobnost dopadu do bodu  $x$

$$w(x) \sim |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2$$

- Nelze rozlišit trajektorie - kvantové částice se chovají jako vlny
- Dochází k interferenci





# Dvoušterbinový experiment

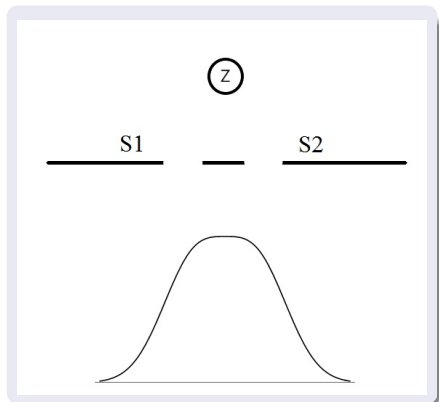
- Otevřené obě šterbiny, je možné rozlišit, kterou částice prošla
- Náhodně se vybere jedna z možností

$$\psi_1(x) \vee \psi_2(x)$$

- Sčítají se pravděpodobnosti
- Pravděpodobnost dopadu do bodu  $x$

$$w(x) \sim |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2$$

- Lze rozlišit trajektorie - kvantové částice se chovají jako částice
- Nedochozí k interferenci



- Mikroskopické objekty mají jak vlastnosti částic, tak vlnění
- V závislosti na typu experimentu se projeví buď vlastnosti částic, nebo vlnění
- Částicové a vlnové vlastnosti jsou komplementární